



Fecha de presentación: 10/2/2023 Fecha de aceptación: 17/9/2023 Fecha de publicación: 25/9/2023

¿Cómo citar este artículo?

Hernández Arteaga, E. y Pérez González, A. (2023).
Procedimiento algorítmico para efectuar el cambio de
variables general en integrales dobles. *Revista*

Márgenes, 11(3), 136-151

<https://revistas.uniss.edu.cu/index.php/margenes/article/view/1623>

Título: procedimiento algorítmico para efectuar el cambio de variables general en integrales dobles

Title: algorithmic procedure to perform the general change of variables in double integrals

Autores:

Lic. Eriel Hernández

Arteaga¹E-mail:

eriel@uniss.edu.cu



<http://orcid.org/0000-0001-8650-5744>

Dr. C. Andel Pérez González¹

E-mail: apgonzalez@uniss.edu.cu



<http://orcid.org/0000-0003-4435-4030>



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

RESUMEN

Introducción: El artículo presenta las integrales dobles como contenido esencial en la formación de los estudiantes de la carrera de Ingeniería Forestal en la Universidad de Sancti Spíritus. Dentro de esta materia, se encuentran las transformaciones que se realizan aplicando el cambio de variables a dichas integrales; las cuales requieren de una serie de pasos para su transformación a integrales más simples.

Objetivo: Proponer un procedimiento algorítmico para efectuar las transformaciones en integrales dobles aplicando el cambio de variable.

Métodos: Se utilizaron el histórico-lógico y el análisis-síntesis para el estudio de las posiciones teóricas que corroboran la utilización de procedimiento algorítmico y realizar, además, pruebas pedagógicas, y entrevistas a profesores para la búsqueda de información sobre el procedimiento que se propone. La población está representada por los 15 estudiantes de carrera Ingeniería Forestal.

Resultado: Se ofrece un procedimiento algorítmico desarrollado; que incluye las acciones que permiten orientar el trabajo planificado de los estudiantes durante las transformaciones a realizar para el cambio de variable en integrales dobles.

Conclusiones: Su aplicación, por parte de los profesores que imparten este contenido resultó favorable y permitió enriquecer el quehacer didáctico de acuerdo a los criterios incluidos inicialmente por los autores del artículo.

Palabras clave: integrales dobles; procedimiento algorítmico; proceso de enseñanza; aprendizaje

ABSTRACT

Introduction: This article presents double integrals as an essential content in the training of Forest Engineering students at the University of Sancti Spíritus. Within this subject, there are the transformations that are performed by applying the change of variable to these integrals, which require a series of steps for their transformation to



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

simpler integrals.

Objective: To propose an algorithmic procedure to perform the transformations in double integrals applying the change of variable.

Methods: The historical-logical and the analysis-synthesis were used to study the theoretical positions that corroborate the use of the algorithmic procedure and to carry out, in addition, pedagogical tests and interviews to professors to search for information on the proposed procedure. The population is represented by the 15 Forest Engineering students.

Result: A developed algorithmic procedure is offered. It includes the actions that allow to guide the planned work of students during the transformations to be carried out for the change of variable in double integrals.

Conclusions: Its application by the professors who teach this content was favorable and allowed to enrich the didactic task according to the criteria initially included by the authors of the article.

Keywords: algorithmic procedure; double integrals; teaching-learning process

INTRODUCCIÓN

Dentro de los contenidos matemáticos que se imparten en la Educación Superior en Cuba, las integrales dobles presentan una vasta aplicación de su uso en carreras de Ingeniería para la formación de los estudiantes. La enseñanza de este contenido debe tener fundamentos bien definidos si se pretende que los futuros egresados no tengan problemas en el desarrollo de habilidades elementales en el aprendizaje de esta rama de la Matemática. Sobre este tema autores como Osorio Amaya y Nesterova (2018), Arévalo-Vasquez y González-Castaño (2021) y Ramírez Santamaría (2021), refieren el uso de la tecnología para el mejoramiento y perfeccionamiento del proceso de



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

enseñanza – aprendizaje de este contenido.

El conocimiento y la aplicación de las integrales dobles específicamente en la carrera Ingeniería Forestal es de gran importancia debido a que este conocimiento permite el cálculo de área y volumen bajo ciertas y determinadas condiciones donde se hace necesario el uso del cambio de variable para lo cual dicho procedimiento requiere una sucesión de pasos para obtener una nueva región de integración; es por eso que el presente trabajo pretende dar un procedimiento algorítmico para poder efectuar el cambio de variable en dichas integrales de forma general reduciéndolas a integrales más sencillas. En correspondencia con lo anterior, para realizar dicha actividad es necesario que los estudiantes dominen el proceso de derivación; sepan elegir, de acuerdo con el nuevo sistema de coordenadas, los nuevos límites de integración en función de las nuevas variables, y además, dominen los pasos para efectuar el cambio de variable.

Es por ello que los autores del artículo se plantean como objetivo: Proponer un procedimiento algorítmico para efectuar las transformaciones en integrales dobles aplicando el cambio de variable.

DESARROLLO

Proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática Superior La enseñanza de las ciencias y en particular, de la Matemática, tiene en cuenta las concepciones pedagógicas contemporáneas basadas en la necesidad de un proceso de enseñanza – aprendizaje donde se potencie el aprender a hacer, aspecto en que coinciden estudiosos de la didáctica de la Matemática.

Al respecto, Cordoba Martínez (2020), refiere que: "El aprendizaje de la Matemática Superior se centra en el: aprendizaje conceptual, aprendizaje algorítmico y aprendizaje estratégico (resolución de problemas)" (p. 20), para dotar al estudiante del conocimiento teórico y reproductivo.



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

Aunque Auccahuallpa Fernández (2018), plantea que en los últimos tiempos dicho proceso se ha dirigido hacia una forma más experimental en donde el docente se ha convertido en un facilitador del conocimiento y, el alumno, en un receptor ya no de conocimiento rígido, sino que necesita de la experiencia y la necesidad de emplear y visualizar los contenidos aprendidos en la aplicación de esos resultados a la realidad objetiva, y a partir de ella, construir nuevos conocimientos.

En este proceso, se refleja la necesidad de la formación y desarrollo de las habilidades matemáticas; la importancia de su sistematización continua y la pertinencia de que al aplicarlas los estudiantes desarrollen un razonamiento lógico y abstracto como modos de la actividad mental propios de la actividad matemática (De León Rodríguez y Grijalva Valencia, 2017).

Dentro de los aspectos actualmente debatidos en la comunidad internacional sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Superior está el uso de las nuevas tecnologías (Grisales Aguirre, 2018). Se reconoce que el uso de las TIC puede apoyar, visualizar y aplicar los procedimientos y modelos matemáticos de forma precisa, y viable estableciendo una relación hombre – máquina en función del aprendizaje.

En las ideas citadas se pone de manifiesto la necesidad de desarrollar las habilidades matemáticas; la importancia de su sistematización continua y la pertinencia de que, al aplicarlas, los estudiantes desarrollen modos de la actividad mental que le permita construir nuevos conocimientos. De ahí, que en el artículo preste especial atención en el cambio de variable en integrales dobles a través de un procedimiento algorítmico. El proceso de enseñanza – aprendizaje de integrales dobles

La enseñanza de las integrales dobles se centra fundamentalmente en el dominio y comprensión de su definición y se han realizados esfuerzos para elaborar tareas donde se analice y describa la interpretación de las integrales dobles a través de la modelación Matemática de problemas reales (Bravo Viera y Rodriguez Rivero, 2020).



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

Con el uso de las tecnologías, se ha podido reforzar la visualización y comprensión de las integrales múltiples (dentro de ellas las dobles) permitiendo modelar, analizar y estimar posibles resultados en la solución de ejercicios sobre este tema (Osorio Amayay Nesterova, 2018) y (Ramírez Santamaría, 2021). Estos autores destacan que las representaciones pueden influenciar en la intuición para relacionar conceptos más complejos, permitiendo afrontar la solución de los problemas desde una perspectiva de formación más profesional.

Autores como Campillo et al., (2018), coinciden con los autores anteriores, al resaltar que las nuevas tecnologías ofrecen una buena posibilidad para la búsqueda de alternativas pedagógicas en la enseñanza; porque, a su juicio, ofrecen posibilidades que la enseñanza tradicional no tiene pues ellas permiten a los estudiantes modificar, evaluar, representar y comparar conceptos, teoremas que no son accesibles directamente a través de la percepción. Aunque su uso evidencia un impacto en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las integrales múltiples, ésta no puede resolver el proceso de abstracción mental para lograr identificar las regiones de integración y para el caso que ocupa lograr deducir una integral doble compleja a una más sencilla aplicando el cambio de variable.

Para efectuar el cambio de variable en una integral doble es necesario conocer una serie de pasos bien definidos que permiten la identificación de los nuevos límites de integración respecto a las nuevas variables. Para ello, es necesario identificar si los límites de integración están ubicados en las integrales o si están dados por funciones que delimitan el área de integración.

Los procedimientos algorítmicos en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática. Los procedimientos algorítmicos están encaminados a la modificación permanente del modo de actuación del estudiante, con los cuales modela y remodela su experiencia en función de su adaptación a los contextos como resultado de su actividad y su comunicación y que no se puede atribuir solamente al proceso de



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

crecimiento y maduración del individuo (González Polo y García González, 2012). Para autores como García et al., (2018), los procedimientos algorítmicos están encaminados al desarrollo de actividades que desarrollen la búsqueda de patrones, relaciones y el pensar matemáticamente que transformen su realidad debido a la complejidad constante en el que se aplique el razonamiento y la interacción.

Con el uso de la tecnología, los procedimientos algorítmicos han dejado de tener un papel protagónico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Superior debido a que los ordenadores pueden realizar cálculos de forma rápida y precisa (Jimenez, 2006, como se citó en De la Fuente, 2016), aunque se coincide con ambos autores cuando destacan que no debe obviarse el uso de estos, pues es necesario la creación de hábitos y habilidades de cálculo en el proceso de enseñanza – aprendizaje de esta asignatura.

Para Vargas Ricardo et al., (2020), los procedimientos algorítmicos, en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática Superior y otras ciencias, se emplean como herramienta de análisis y representación que se aplica en varios campos debido a que brindan la posibilidad de representar estructuras complejas de forma sintética, y relaciones entre objetos abstractos que requieren de la toma de decisiones permitiendo facilitar el aprendizaje de reglas y modos de actuación. Es por eso que para la propuesta que realizan los autores en el artículo se asume que un procedimiento algorítmico es:

“Sucesión de ordenes o indicaciones para realizar un cierto sistema de operaciones en un orden determinado, que induce a operaciones univocas, rigurosamente determinadas”(Ballester Pedroso et al., 1992, p. 25).

MATERIALES Y MÉTODOS

La metodología seguida al elaborar la vía de solución que se propone para la problemática identificada se caracterizó por un enfoque cuantitativo.

Se utilizaron métodos teóricos:



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

histórico-lógico y el analítico-sintético; los que posibilitaron fundamentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Superior específicamente en el trabajo con el cambio de variable para integrales dobles. Los métodos empíricos utilizados fueron el producto de la actividad, la observación pedagógica con el objetivo de obtener información asociada a la participación en la solución de ejercicios para determinar los conocimientos y dificultades donde intervenga el cambio de variable en integrales dobles, y detectar las mayores dificultades en los estudiantes, la entrevista a profesores que imparten este contenido en las diferentes carreras con el objetivo de identificar las mayores dificultades sobre este tema. Estos facilitaron la recogida y el análisis de datos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos sobre el cambio de variable en integrales dobles y sus resultados, como elemento esencial para esclarecer el estado de la problemática objeto de análisis, y posterior a la aplicación práctica de la propuesta.

Para ello se trabajó con un grupo de 15 estudiantes de Ingeniería Forestal, que representan la población, la misma tiene la finalidad de determinar el grado de desarrollo que lograban para lograr transformar una integral doble compleja a una sencilla aplicando el cambio de variable.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para la utilización del procedimiento algorítmico se utilizó una estructura lógica basada en la toma de decisiones, la cual refleja el orden a seguir según la decisión que se tome durante la ejecución del procedimiento (en el caso de que sea **SI**, se recorrería la rama izquierda y en caso de que sea **NO**, la rama derecha) y señalando las preguntas en cuadrados de color rojo y el conjunto de acciones a desarrollar según la decisión tomada.

Para la elaboración del mismo se tuvo en cuenta los distintos elementos que aportaron el resultado de los métodos empíricos aplicados y así elaborar los pasos que componen el procedimiento algorítmico diseñado y las operaciones para lograr determinar:

1. Existe orientación para realizar directamente el cambio de variable.
2. Si están dadas las funciones $x = \varphi_1(u, v)$ e $y = \varphi_2(u, v)$ explícitamente.
3. Calcular las derivadas parciales de x respecto a cada variable u y v .
4. Calcular las derivadas parciales de y respecto a cada variable u y v .

5. Calcular el Jacobiano $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

6. Representar en el sistema de coordenadas $(u; v)$ la nueva región de integración.



Seleccionar los límites de integración y evaluar el integrando original

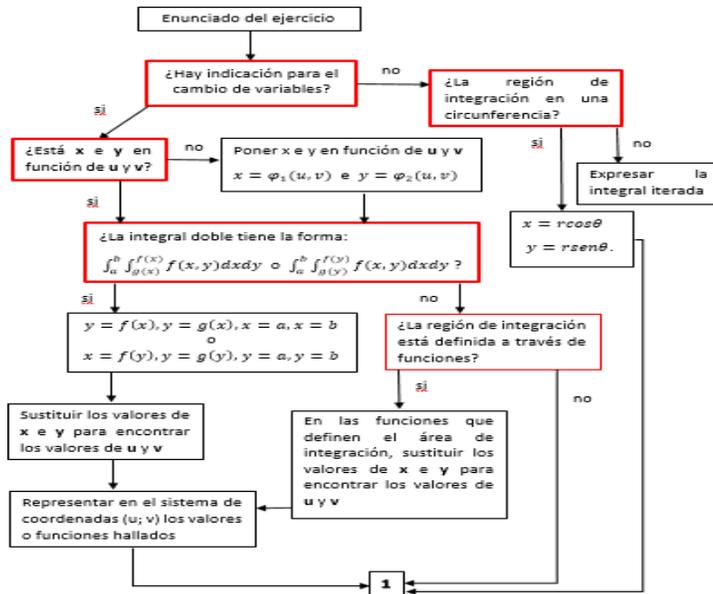


Figura 2. Calculo del Jacobiano y obtención de la integral doble correspondiente

Ejemplo 1.

Dada la integral $\iint_D dx dy$ limitado por la región $D: (x; y) \in \mathbb{R}^2: xy = 1; xy = 2; y = \frac{1}{3x}; y = 3x$. Obtenga la nueva integral aplicando para ello el cambio de variables indicado para

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}; y = \sqrt{uv}$$

¿Hay indicación para el cambio de variables? la respuesta será: **Si**, por lo que se pasa a la próxima pregunta ¿Está **x** e **y** en función de **u** y **v**? la respuesta será: **Si**, por lo que se pasa a la próxima pregunta ¿La integral doble tiene la forma:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} f(x,y) dx dy \quad \text{o}$$

$\int_a^b \int_{g(y)}^{f(y)} f(x,y) dx dy$? en este caso la respuesta sería **No**, por lo que se tomará el camino hacia la derecha realizando la siguiente pregunta ¿La región de integración está definida a través de funciones? la



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

respuesta será: Si, por lo que se pasa a la ejecución de la acción indicada:

<u>Funciones</u> en <u>términos de (x; y)</u>	<u>Funciones</u> en <u>términos de (u; v)</u>
$xy = 1$	$\sqrt{\frac{u}{v}}\sqrt{uv} = 1$
$xy = 2$	$\sqrt{\frac{u}{v}}\sqrt{uv} = 2$
$y = x$	$\sqrt{\frac{u}{v}} = \sqrt{uv}$
$y = 3x$	$\sqrt{uv} = 3\sqrt{\frac{u}{v}}$

Realizando las operaciones correspondientes en cada ecuación de la segunda columna se obtienen los valores de u y v respectivamente los cuales son:

$|u| = 1, |u| = 2, |v| = 1$ y $|v| = 3$ lo que significa que $u = 1$ y $u = -1, u = 2$ y $u = -2, v = 1$ y

$v = -1, v = 3$ y $v = -3$. Para este caso no se tiene en cuenta los valores negativos debido que al sustituirlos en las expresiones no se puede calcular su raíz cuadrada. Por tanto, las soluciones reales son: $u = 1, u = 2, v = 1$ y $v = 3$.

Activar Window

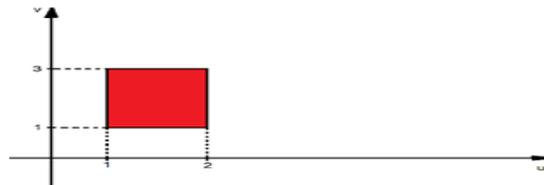


Figura 3: Nueva región de integración

$$\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{uv}} - \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{uv}} - \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \right| = \left| \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{uv^3}} - \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \right| = \left| \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{u} \sqrt{v^3}} - \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{v^3}} - \frac{1}{2\sqrt{v^3}} \right| = 0$$

Activar



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

La última pregunta sería ¿El integrando $f(x, y) = 1$?, en este caso la respuesta sería **Sí**. Por tanto, utilizando la nueva región y el cálculo del Jacobiano la expresión de la integral doble puede quedar de dos formas diferentes

$$\frac{1}{2} \int_1^2 du \int_1^{\frac{1}{v}} dv \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{v}} dv \int_1^2 du$$

Ejemplo 2.

Sea la integral $\int_0^1 \int_x^{2x} dy$. Obténgase la nueva integral realizando el cambio de variables para $x = u(1 - v); y = uv$

¿Hay indicación para el cambio de variables? la respuesta será: **Sí**, por lo que se pasa a la próxima pregunta ¿Está **x** e **y** en función de **u** y **v**? la respuesta será: **Sí**, por lo que se pasa a la próxima pregunta ¿La integral doble tiene la forma: $\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} f(x, y) dx dy$ o

$\int_a \int_{g(y)} f(x, y) dx dy$? en este caso la respuesta sería **Sí**, representado por la primera

forma pasando a la ejecución de la acción indicada:

<u>Funciones en</u>	<u>Funciones en</u>
<u>términos de (x; y)</u>	<u>términos de (u; v)</u>
$y = 2x$	$uv = 2u(1 - v)$
$y = x$	$uv = u(1 - v)$
$x = 1$	$u(1 - v) = 1$
$x = 0$	$u(1 - v) = 0$

Realizando las operaciones correspondientes en cada ecuación de la segunda columna se obtienen

$$v = \frac{2}{3}, v = \frac{1}{2}, u = \frac{1}{1-v} \text{ y } u = 0.$$

los valores de **u** y **v** respectivamente los cuales son:

La otra acción a realizar es la representación gráfica estas funciones en el sistema de coordenada (**u**; **v**) las cuales describen una función de proporcionalidad inversa y tres funciones constantes. (Figura 2)



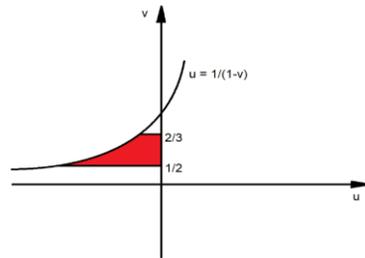


Figura 4: Nueva región de integración

El próximo paso es calcular el Jacobiano

$$\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right| = (u(1-v) + uv) = (u - uv + uv) = u$$

La última pregunta sería ¿El integrando $f(x, y) = 1$? en este caso la respuesta sería **Sí**. Por tanto, utilizando la nueva región y el cálculo del Jacobiano la expresión de la integral doble queda de la segunda forma

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-\frac{1}{u}} u \, dv \, du$$

La propuesta fue llevada a cabo por uno de los autores en la práctica pedagógica, para esto se seleccionó a los 15 estudiantes del primer año donde este imparte docencia constituyendo el mismo el 100% de la población.

Para su evaluación se utilizaron los siguientes indicadores:

- Identificación del enunciado general de ejercicios en cuanto al cambio de variable.
- Identificar como viene dada la región de integración.
- Obtener los nuevos valores (o funciones) en términos de **u** y **v**.
- Calcular el Jacobiano.

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

- Representar los nuevos valores (o funciones) en el nuevo sistema de coordenadas ($u; v$).
- Expresar la integral doble en función de los nuevos valores de u y v .

La medición de los indicadores se realizó mediante una escala ordinal que considera las categorías muy adecuado (MA), adecuado (A) e inadecuado (I).

Durante la aplicación se utilizó una guía de observación para valorar sistemáticamente la actuación de los estudiantes durante la realización en cada ejercicio y al concluir la experiencia se aplicó una prueba pedagógica.

Al triangular los resultados de los indicadores evaluados en ambos instrumentos, se puede concluir que:

En relación a la identificación del enunciado general del ejercicio en cuanto al cambio de variable, el 33.3% (5) de los estudiantes lo dominan de manera muy adecuada, en tanto el 46.7% (7) se comporta de forma adecuada, mostrando conocer que hay que realizar el cambio de variable, mientras que el restante 20% (3) se manifiestan inadecuadamente al no conocer la sugerencia dada explícita o implícitamente, para efectuar del cambio de variable.

En cuanto a **Identificar como viene dada la región de integración** el 46.7% (7) lo hacen de manera muy adecuada en tanto el 20% (3) se comporta de forma adecuada mostrando mayor dificultad cuando la región de integración está expresada en la integral doble como límites de integración, mientras que el restante 33.3% (5) lo hace inadecuadamente al no conocer las dos formas posibles de expresar el área de integración.

Para obtener los nuevos valores de u y v el 20% (3) de los estudiantes son capaces de establecer las relaciones, en tanto el 33% (5) se comporta de forma adecuada, al no saber despejar las ecuaciones correspondientes, los restantes 7 estudiantes 46.7% lo hace inadecuadamente al no saber despejar y resolver las ecuaciones descartando las que no son soluciones.

Dentro del aspecto para calcular el Jacobiano el 40% (6) de los estudiantes lo calculan de manera muy adecuada mientras en el 13.3% (2) se comporta de forma adecuada, dominan el cálculo del determinante del segundo orden y el restante 46.7% (7) lo hace inadecuadamente al no dominar el cálculo de derivadas parciales, y la solución al determinante de segundo orden.

En cuanto a representar los nuevos valores (o funciones) en el nuevo sistema de coordenadas ($u; v$) el 33.3% (5) de los estudiantes lo realiza de forma muy adecuada, por otra parte, el 20% (3) lo realiza de forma adecuada, los mismos no reconocen la correspondencia de coordenadas en las variables u y v , y el restante 46.7% (7) lo realiza de forma inadecuada al no dominar las funciones elementales y la



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

correspondencia entre el sistema de coordenadas $(x; y)$ en el otro sistema de coordenadas $(u; v)$.

Para expresar la integral doble en función de los nuevos valores de u y v el 20% (3) de los estudiantes lo realiza de forma muy adecuada, por otra parte, el 66.6% (10) lo realiza de forma adecuada, los mismos no reconocen la correspondencia de coordenadas en las variables u y v , y el restante 13.3% (2) lo realiza de forma inadecuada al no seleccionar adecuadamente los límites de integración y no saber ubicar los diferenciales según el orden escogido.

CONCLUSIONES

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática Superior ha estado enmarcado por el aprendizaje conceptual, algorítmico y experimental donde la tecnología ha jugado un papel fundamental en la adquisición de conocimiento relacionado con las integrales dobles permitiendo desarrollar las habilidades necesarias que contribuyan a

fomentar un pensamiento abstracto debido a las diferentes manera de expresar éstas de forma más sencillas aplicando el cambio de variable en integrales dobles más complejas siempre y cuando lo requieran.

El procedimiento algorítmico propuesto favorece el desarrollo del tratamiento del cambio de variable en integrales dobles y se fundamenta en las exigencias del enfoque metodológico general de la asignatura, sus pasos orientan el trabajo planificado de los estudiantes durante la solución de los ejercicios a partir del empleo de formas de trabajo y de pensamiento matemático.

Con la aplicación del procedimiento algorítmico y la triangulación de los resultados se logró evaluar los indicadores, observándose resultados significativos con respecto al cambio de variable en el cálculo del Jacobiano, la representación de la nueva región de integración en el sistema de coordenadas $(u; v)$, así como la obtención de la integral doble para dicha región en el nuevo sistema de coordenadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arévalo-Vasquez, B. E. y González-Castaño, A. (2021). Enseñanza de integrales mediante métodos numéricos por medio del uso de las TIC. *Sinergias Educativas*, 6(1), 21-34. <https://doi.org/10.37954/se,v6i1.159>

Auccahuallpa Fernández, R. (2018). La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por medio del laboratorio "Rurashpa Yachacuy". Aprende haciendo. *Revista de Divulgación de Experiencias Pedagógicas: MAMAKUNA. Innovación educativa*, (8), 68–75. <https://revistas.unae.edu.ec/index.php/mamakuna/article/view/143>

Ballester Pedroso, S., Santana de Armas, H., Hernandez Montes de Oca, S., Cruz, I., Arango Gonzalez, C., Garcia Garcia, M., Alvarez Gomez, A., Rodriguez, M., Batista, L. C., Villegas Jimenez, E., Almeida Carazo, B. y Paul, T. F. (1992).



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

Metodología de la enseñanza de la Matemática: Tomo I. Pueblo y Educación.

Bravo Viera, J. L. y Rodríguez Rivero, L. (2020). Formación del concepto de integral doble mediante la modelación Matemática en la carrera de Ingeniería Informática. *Caribe Latinoamericano de Matemática Educativa: CLAME: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(1), 400–409. <http://funes.uniandes.edu.co/22416/1/Bravo2020Formacion.pdf>

Campillo, A., Cafferata Ferri, S., Srour, Y. y Solari, A. B. (2018). Cambio de variables en integrales dobles y triples utilizando GeoGebra. *ReTyCA: Revista de Tecnologías y Ciencias Aplicadas*, 3(2), 1-9. <https://retyca-tecno.unca.edu.ar/2018/11/30/Cambio-de-variables-en-integrales-dobles-y-triples-utilizando-geogebra/>

Cordoba Martínez, S. P. (2020). *Tendencias en didáctica de las matemáticas. Una revisión documental* [Tesis de especialidad en Pedagogía, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia]. <http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/11949>

De la Fuente Morales, E. (2016). Enseñanza de la matemática por el método algorítmico. *Praxis Investigativa ReDIE*, 8(14), 231–236. <https://redie.mx/librosyrevistas/revistas/praxisinv14.pdf#page=231>

De León Rodríguez, N. R. y Grijalva Valencia, M. E. (2017). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática con utilización de asistentes matemáticos computacionales y gestores informáticos de cursos*. <http://pucedspace.puce.edu.ec/handle/23000/1112>

García, Y., Torrealba, A. y Contreras, A. (2018). Procedimientos didácticos para la enseñanza de la matemática a educación primaria en la unidad educativa barrera. *Revista ARJÉ*, 12(22), 92–98. <http://www.arje.bc.uc.edu.ve/arje22/art12.pdf&ved=2ahUKEwj4rmAAxUTF1kFHdABDrIQnoECBYQAQ&usg=AOvVaw1v-rrs9PMHB7pHSKckyeW3>

González Polo, M. y García González, L. A. (2012). Procedimientos didácticos para la dirección de un aprendizaje desarrollador. *Revista Electrónica EduSol*, 12(41), 71–82. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475748680008>

Grisales Aguirre, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, 14(2), 98–214. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1900-38032018000200198&lng=en&nrm=iso&tlng=es

Osorio Amaya, E. A. y Nesterova, E. (2018). El aprendizaje de las aplicaciones de las integrales múltiples con el empleo de la realidad aumentada. *Revista electrónica AMIUTEM: Asociación Mexicana de Investigaciones de Uso de Tecnologías Esucación Matemática*, 6(2),



ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

15–35. <https://revista.amiutem.edu.mx/relecamiutem/article/view/167>

Ramírez Santamaría, B. A. (2021). GeoGebra en 2D y 3D como recurso didáctico en un curso de integración múltiple : una experiencia de enseñanza- aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, 21(1), 1–17. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v21i1.5341>

Vargas Ricardo, A., Lezcano Rodriguez, L. E. y Pérez González, O. L. (2020). El empleo de algoritmos en el proceso de enseñanza- aprendizaje del Álgebra. *Serie Científica de La Universidad de Las Ciencias Informáticas*, 13(9), 113–123. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8590297.pdf>

Conflicto de intereses:

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

Contribución de los autores:

E.H.A.: Aportó el procedimiento algorítmico, en el análisis y discusión de los resultados.

A.P.G.: Tributo en la búsqueda y citación de las referencias bibliográficas.

Márgenes publica sus artículos bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)





<http://revistas.uniss.edu.cu/index.php/margenes>

margenes@uniss.edu.cu