



## ARTICULO DE INVESTIGACIÓN ORIGINAL

Fecha de presentación: 1-03-2021 Fecha de aceptación: 15-04-2021 Fecha de publicación: 9-07-2021

### LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES VERBALES DEL PLANO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

### THE TRANSFERENCE BETWEEN VERBAL REPRESENTATIONS OF PLANES IN THE TRAINING OF MATHEMATICS PROFESSORS

Ortelio Nilo Quero-Méndez <sup>1</sup>, Aldo Medardo Ruiz-Pérez <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular del departamento de Física-Matemática. Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez". Cuba. Correo: [oguero@uniss.edu.cu](mailto:oguero@uniss.edu.cu). ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-7872-2957>. <sup>2</sup> Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Auxiliar del departamento de Física-Matemática. Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez". Cuba. Correo: [aldoruiz58@gmail.com](mailto:aldoruiz58@gmail.com). ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1882-385X>

---

#### ¿Cómo citar este artículo?

Quero Méndez, O. N. y Ruiz Pérez, A. M. (Julio-octubre, 2021). La transferencia entre representaciones verbales del plano en la formación de profesores de matemática. *Pedagogía y Sociedad*, 24 (61), 300-324. Recuperado de <http://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad/article/view/1238>

---

#### RESUMEN

**Introducción:** El artículo propone la solución a un problema acerca de la transferencia entre representaciones verbales del plano. **Objetivo:** exponer un procedimiento didáctico dirigido a favorecer la transferencia entre representaciones verbales del plano en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica

en la formación de profesores de Matemática. **Métodos** utilizados: histórico-lógico, analítico-sintético e inductivo-deductivo, para el estudio de las fuentes de información y extraer de ellas regularidades relacionadas con las representaciones y la transferencia entre estas; el análisis de los productos del proceso pedagógico, la observación, las

pruebas pedagógicas y el análisis de tablas de frecuencias para valorar el aprendizaje. **Resultados:** los principales aspectos de aprendizaje logrados con la aplicación del procedimiento son: la identificación del tipo y la forma de la representación dada y la representación buscada, conocimiento de los pasos del procedimiento y la ejecución del procedimiento, aunque también se identificaron dificultades. **Conclusiones:** el procedimiento propuesto incluye las acciones fundamentales dirigidas a la planificación y la dinámica del proceso de enseñanza y aprendizaje de este contenido. Los resultados en la medición del desempeño de los estudiantes donde se implementó experimentalmente el procedimiento didáctico demuestran la efectividad de este procedimiento.

**Palabras clave:** didáctica de la matemática; docentes de matemática; formación de docentes; transferencia entre representaciones verbales del plano

---

## ABSTRACT

The article proposes the solution to a problem about the transference between verbal representations of the

plane. **Objective:** to present a didactic procedure aimed at favoring the transference between verbal representations of the plane in the teaching-learning process of Analytical Geometry in the training of mathematics professors. **Methods:** historical-logical, analytical-synthetic and inductive-deductive were used for the study of information sources and for the identification of regularities related to representations and the transference between them, as well as the analysis of the aspects of the pedagogical process, the observation, the pedagogical tests and the analysis of frequency tables to assess learning.

**Results:** The identification of the type and form of the given representation and the sought representation; the different steps of the procedure and its application; although some encountered difficulties, too.

**Conclusion:** the proposed procedure includes the fundamental actions directed to the planning and dynamics of the teaching/learning process of this content. The obtained results from the measurement of the performance of the students involved in the experimental implementation of the didactic procedure demonstrate its effectiveness.

**Keywords:** training of Mathematics professors; didactic procedure; transference between verbal representations of the plane.

---

## INTRODUCCIÓN

**E**l papel del trabajo con representaciones de los objetos matemáticos es un tema que ha acaparado la atención de investigadores en didáctica de la Matemática desde la década de los 70 del pasado siglo. Los inicios del interés por este tema se remontan a la tesis doctoral de Claude Janvier (1978) sobre el aprendizaje de las funciones.

Las ideas de la tesis de Janvier, fueron perfeccionadas posteriormente por el propio Janvier y otros investigadores del Shell Center for Mathematical Education. En 1987 Janvier publicó el libro titulado *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* en el que se extienden estas ideas a otros objetos matemáticos.

La obra de Janvier se divulgó en Europa y otros países del mundo y en varios de ellos los investigadores en didáctica de la Matemática, el

profesorado de la asignatura e instituciones se interesaron por el papel de las representaciones en el aprendizaje de la Matemática. Así surgieron otros líderes científicos que desarrollaron la teoría y elaboraron propuestas para aplicarla.

Por esta razón esta tendencia didáctica ha tenido un gran impacto internacional, tanto en la práctica como en la investigación. Prueba de ello es que en la base teórica de proyectos internacionales importantes sobre evaluación de la calidad de la educación como PISA y Timss se incluye el trabajo con representaciones. En la base teórica de Timss se señala: “La representación de ideas crea el núcleo del pensamiento matemático y de la comunicación, y la capacidad para crear representaciones equivalentes es fundamental para conseguir el éxito en la asignatura” (como se citó en Mullis y Martin, 2020, p. 25).

Otro factor que ha contribuido a la globalización del trabajo con representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) de la Matemática es su inclusión en los Principios y Estándares del Consejo

Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos de América (NCTM). En la última versión de este documento (año 2000), la representación es el segundo de los cinco procesos matemáticos reconocidos (National Council of Teachers of Mathematics /NCTM/, 2000).

La investigación sobre el trabajo con representaciones mantiene su actualidad a nivel internacional: en la base de datos ERIC se registran 799 publicaciones sobre este tema en 2020 y 17446 desde 1999 hasta la fecha, las cuales cubren todos los niveles de educación.

Algunos de los trabajos más recientes corresponden a Ospina (2012), Amaya y Medina (2013), Amaya, Pino Fan y Medina (2016) y Meza y Amaya (2017) todos relativos a las representaciones en el estudio de las funciones.

En Cuba ha sido pobre la influencia de los trabajos de Janvier y de la comunidad que investigaba sobre el papel de las representaciones en el PEA de la Matemática en el siglo XX.

El Ministerio de Educación (Mined) en los últimos años ha asumido las

tendencias internacionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y las ha incluido en los documentos metodológicos y libros de texto. Respecto al trabajo con representaciones en el cuarto de los lineamientos correspondientes al enfoque metodológico general de la asignatura Matemática se plantea: “Propiciar la reflexión, el análisis de los significados y formas de representación de los contenidos, el establecimiento de sus relaciones mutuas, (...)” (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014, p. 2).

En correspondencia con este lineamiento se ha incluido el trabajo con representaciones de objetos matemáticos en la línea directriz “Adiestramiento lógico-lingüístico” (Álvarez, Almeida y Villegas, 2014).

En Cuba la investigación sobre el trabajo con representaciones es escasa e incipiente. En la revisión bibliográfica realizada por Quero durante su investigación doctoral (Quero, 2018) acerca de la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica en la formación de profesores de Matemática se identificaron solo una tesis de doctorado (Gómez, 2005) y

dos de maestría sobre el tema (Cañizares, 2010; Leyva, 2012); las tres enmarcadas en las funciones, dos en la Educación Preuniversitaria y una en la Educación Superior.

El trabajo con representaciones en el PEA de la Geometría Analítica correspondiente a la formación de profesores de Matemática generalmente transcurre espontáneamente, según la lógica de la exposición del contenido matemático tal cual aparece en los libros, sin prestársele mucha atención al papel de la asignatura en la formación didáctica. En lo que respecta a la transferencia entre representaciones de objetos de la Geometría Analítica (Teroga) y particularmente del plano se presta poca atención al tratamiento de todos los casos que se pueden presentar, y quedan varios de ellos sin incluir en el contenido de la asignatura, entre los cuales están los relativos a las transferencias entre representaciones verbales.

Son posibles causas de esta situación problemática el insuficiente desarrollo de la teoría de la representación de los objetos geométricos y las carencias de la bibliografía que se

utiliza en el PEA de la asignatura, consistentes en que en ella no se exponen todas las transferencias posibles, no se describen los procedimientos a utilizar en la transferencia entre representaciones verbales y la ausencia de ejercicios y problemas dirigidos a la elaboración y fijación de procedimientos.

El artículo ofrece respuesta a las insuficiencias y carencias señaladas, pues contiene contribuciones de los autores a la teoría de las representaciones de objetos de la Geometría Analítica en el PEA, un procedimiento didáctico para la transferencia entre representaciones verbales del plano en la formación de profesores de Matemática y el análisis de los resultados de su aplicación. Su objetivo es exponer un procedimiento didáctico dirigido a favorecer la transferencia entre representaciones verbales del plano en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación de profesores de Matemática

## **MARCO TEÓRICO O REFERENTES CONCEPTUALES**

## Los conceptos de representación y transferencia entre representaciones

Las definiciones de los conceptos de representación de un plano, tipo de representación de un plano, representación verbal de un plano, forma de representación de un plano, forma reconocida de representación de un plano y transferencia entre representaciones de un plano y sus conceptos subordinados que se exponen a continuación, así como las notaciones utilizadas han resultado de la particularización de las definiciones y notaciones introducidas por los autores referidas a un objeto de la Geometría Analítica (Quero y Ruiz, 2018).

Se entiende por representación de un plano (objeto representado) el objeto material o mental (objeto representante) que lo sustituye y lo hace presente determinándolo de forma única en el pensamiento, el lenguaje y la comunicación con el uso de un sistema de coordenadas elegido convenientemente como sistema de referencia.

Para denotar las representaciones de un plano, los sistemas de coordenadas utilizados como

sistemas de referencia y los tipos de estos sistemas de coordenadas se utilizan, respectivamente, las letras latinas R y C y la letra griega minúscula  $\tau$ ; todas seguidas de un subíndice. Los sistemas de coordenadas pueden ser de tipo cartesiano, cilíndrico y esférico.

Los tipos de representaciones del plano son subclases de la extensión de este concepto cuyo estudio tiene un interés especial y se denotan con la letra T seguida de un subíndice. Los de mayor interés en el PEA de la Geometría Analítica son los tipos verbal, gráfico y analítico; en este artículo se utiliza el tipo verbal.

Representación **verbal** de un plano, en la Geometría Analítica, es una representación mediante una frase que está compuesta por palabras del lenguaje común, palabras de la terminología matemática y eventualmente por signos matemáticos, particularmente de la Geometría Analítica. Por ejemplo, la frase: "plano que pasa por los puntos  $A(3;-1;2)$ ,  $B(4,-1;-1)$  y  $C(2;0;2)$ " es una representación de este tipo.

Toda representación verbal de un plano está basada en entes que lo determinan con unicidad como son,

por ejemplo: tres de sus puntos no alineados, dos rectas que se cortan, un punto y una recta que no pasa por este punto, dos rectas paralelas (distintas) y, un punto del plano y dos vectores linealmente independientes paralelos al plano.

Además del concepto de tipo de representación, se utiliza como herramienta teórica el concepto de forma de representación de un plano, entendida como la configuración general del objeto representante, de modo que dos representaciones de diferentes tipos tienen distintas formas, mientras que dos representaciones del mismo tipo pueden tener la misma forma o formas distintas. Las formas de representación de un plano se denotan con la letra F seguida de un subíndice.

Las siguientes son representaciones verbales de un plano  $\alpha$  con formas diferentes. En la primera de ellas el plano está determinado por tres puntos no alineados y en la segunda, por un punto del plano y dos vectores paralelos a él:

- Plano que pasa por los puntos  $A(3;4;-5)$ ,  $B(6;5;-6)$  y  $C(4,2;-4)$ .

- Plano que pasa por el punto  $A(3;4;-5)$  y es paralelo a los vectores  $a=(3;1,-1)$  y  $b=(1;2;-1)$ .

Como el conocimiento matemático se construye en el marco de una institución, las formas de representación de un plano aceptadas en la institución matemática se llaman formas reconocidas de representación.

La transferencia entre representaciones es uno de los procesos involucrados en el trabajo con representaciones. En las fuentes bibliográficas consultadas se trata con distintos nombres, entre ellos, traducción (Rico, 2009), conversión o tratamiento (Duval, 2006, 2016) y juego de marcos (Douady, 2000).

La idea esencial de la transferencia entre dos representaciones de un objeto geométrico O considera que para O existen dos representaciones  $R_1$  y  $R_2$ , de las cuales una es conocida y la otra desconocida.

El proceso que consiste en obtener la representación desconocida a partir de la conocida se llama transferencia entre esas dos representaciones. Por ejemplo, se sabe que para todo plano existe un sistema de ecuaciones

paramétricas (representación  $R_1$ ) y una ecuación general (representación  $R_2$ ). Si para un plano particular se conociera su ecuación general y se desconociera su sistema de ecuaciones paramétricas, el proceso mediante el cual se obtiene el sistema de ecuaciones paramétricas a partir de la ecuación general es la transferencia de  $R_2$  a  $R_1$ .

Para perfeccionar la idea anterior los autores de este escrito consideraron, además, las formas respectivas  $F_1$  y  $F_2$  de las representaciones  $R_1$  y  $R_2$ , los respectivos tipos  $T_1$  y  $T_2$  de estas representaciones, los sistemas de coordenadas  $C_1$  y  $C_2$  utilizados en las representaciones  $R_1$  y  $R_2$  y los respectivos tipos  $\tau_1$  y  $\tau_2$  de estos sistemas de coordenadas. La definición resultante a partir de esta consideración es la siguiente:

Si  $O$  es un plano, determinado por su representación  $R_1$  en la forma  $F_1$  del tipo  $T_1$  correspondiente al sistema de coordenadas  $C_1$  de tipo  $\tau_1$  y se desconoce su representación  $R_2$  en la forma  $F_2$  del tipo  $T_2$  correspondiente al sistema de coordenadas  $C_2$  de tipo  $\tau_2$ , el proceso mediante el cual se obtiene  $R_2$  a partir de  $R_1$  se llama **transferencia** de  $R_1$  a  $R_2$ . Si

inversamente se conociera  $R_2$  y desconociera  $R_1$ , el proceso que permite obtener  $R_1$  a partir de  $R_2$  se llama transferencia de  $R_2$  a  $R_1$ .

Cuando  $C_1=C_2$  la transferencia se llama transferencia **intrasistema**, si en cambio  $C_1\neq C_2$ , esta se denomina transferencia **intersistemas**. Cuando  $T_1=T_2$  la transferencia se llama transferencia **intratipo**, si en cambio  $T_1\neq T_2$ , esta recibe el nombre de transferencia **intertipos**. Si quien realiza la transferencia de  $R_1$  a  $R_2$  o de  $R_2$  a  $R_1$  no utiliza una tercera representación reconocida del objeto  $O$  como representación intermedia, la transferencia se llama **directa**. En otro caso la transferencia se llama **compuesta**.

Una transferencia entre representaciones de un objeto  $O$  será directa o compuesta en dependencia del desarrollo del sistema de representación y del procedimiento utilizado por el sujeto que la realiza.

El análisis del factor referido a los medios para realizar la transferencia conduce a diferenciar las transferencias que se realizan en la forma tradicional con lápiz y papel de las que se realizan con el uso de algún software. Es por eso que se

consideran dos tipos de transferencia, según los medios utilizados: transferencia con **lápiz y papel** y transferencia con el **uso de un software**.

La transferencia entre dos representaciones del plano en la Geometría Analítica es un proceso que requiere de la aplicación de un procedimiento que garantice la obtención de una representación procedimiento que garantice la obtención de una representación desconocida a partir de una conocida. A la primera se le llama representación dada (RD) y a la segunda, representación buscada (RB).

### **Procedimiento para favorecer la transferencia entre representaciones verbales del plano**

El procedimiento está compuesto por seis acciones y perfecciona y amplía el expuesto en Quero y Ruiz (2016). Las acciones son:

#### **1) Determinación de las formas de representación verbales del plano**

Las principales representaciones verbales de un plano en el PEA de la Geometría Analítica en la formación

de profesores de Matemática corresponden a las formas: 1) frase con tres puntos no alineados, 2) frase con un punto del plano y un vector normal, 3) frase con un punto del plano y dos vectores de dirección, 4) frase con un punto del plano y una recta que no pasa por el punto, 5) frase con dos rectas que se cortan y 6) frase con dos rectas paralelas diferentes.

#### **2) Determinación de las posibles transferencias entre representaciones verbales del plano**

Para el plano se han considerado seis formas de representación verbal, cada transferencia entre representaciones con alguna de estas formas se puede modelar con el concepto de par ordenado en que no pueden repetirse sus componentes. Por esta razón es aplicable la regla del producto de la combinatoria. Para la representación dada son posibles seis opciones, puesto que no se puede repetir las componentes, después de elegida cada una de estas opciones para la representación buscada son posibles cinco opciones. Al multiplicar seis por cinco se obtienen 30 casos posibles

para las transferencias entre representar simbólicamente utilizando representaciones del tipo verbal. una flecha y dos etiquetas (Tabla 1).

La transferencia entre representaciones se puede

*Tabla 1: Casos posibles de transferencia entre representaciones verbales*

Representación dada	Transferencias a partir de la representación dada
Plano representado utilizando tres puntos (TP)	1) TP→PVD, 2) TP→PVN, 3) TP→PR, 4) TP→RRC y 5) TP→RRP
Plano representado por un punto y dos vectores de dirección (PVD).	6) PVD→TP, 7) PVD→PVN, 8) PVD→PR, 9) PVD→RRC y 10)PVD→PRP
Plano representado por un punto y un vector perpendicular (PVN)	11) PVN→TP, 12) PVN→PVD, 13) PVN→PR, 14) PVN→RRC y 15) PVN→RRP
Plano representado por un punto y una recta que no pasa por el punto (PR)	16) PR→TP, 17) PR→PVD, 18) PR→PVN, 19) PR→RRC y 20) PR→RRP
Plano representado por dos rectas que se cortan (RRC)	21) RRC→TP, 22) RRC→PVD, 23) RRC→PVN, 24) RRC→PR y 25) RRC→RRP
Plano representado por dos rectas paralelas (RRP)	26) RRP→TP, 27) RRP→PVD, 28) RRP→PVN, 29) RRP→PR y 30) RRP→RRC

Fuente: Elaboración propia

### 3) Elaboración de tareas de aprendizaje para las transferencias

Después de identificar las posibles procedimientos por el estudiante transferencias a realizar se necesita procedimientos de transferencia.

elaborar las tareas de aprendizaje Las variables de tarea a tener en cuenta son: 1) tipo de transferencia a realizar, 2) estructura de la tarea según su exigencia y 3) conocimiento del procedimiento aquí por el estudiante. La primera variable puede tomar los valores: transferencia directa con lápiz y papel (1.1),

transferencia compuesta con lápiz y papel (1.2) o transferencia compuesta con software (1.3). La segunda puede tomar los valores: tarea de respuesta abierta (2.1) o tarea de completamiento (2.2) y la tercera: el estudiante conoce el procedimiento (3.1) y el estudiante no conoce el procedimiento (3.2). Aplicando el principio de multiplicación de la teoría de combinatoria se obtienen 12 tipos de tareas (Tabla 2).

Tabla 2: Tipos de tareas de aprendizaje que exigen transferencia

Tipo	Valor de la variable 1	Valor de la variable 2	Valor de la variable 3
1	1.1	2.1	3.1
2	1.1	2.1	3.2
3	1.1	2.2	3.1
4	1.1	2.2	3.2
5	1.2	2.1	3.1
6	1.2	2.1	3.2
7	1.2	2.2	3.1
8	1.2	2.2	3.2
9	1.3	2.1	3.1
10	1.3	2.1	3.2
11	1.3	2.2	3.1
12	1.3	2.2	3.2

Fuente: Elaboración propia

Ejemplos de tareas son los siguientes:

Ejemplo 1.

El plano  $\alpha$  pasa por los puntos no alineados P(1;4;-4), Q(2;5;3) y R(3;0;-2).

Obtenga representaciones verbales de  $\alpha$  determinadas por: 1) un punto y dos vectores paralelos al plano, 2) un punto y un vector normal, 3) dos rectas paralelas, 4) dos rectas que se cortan y 5) por un punto y una recta que no lo contiene.

Ejemplo 2.

Un plano  $\varepsilon$  contiene las rectas

$$\text{paralelas r: } \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 + 5t \end{cases} \text{ y s: } \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$$

Obtenga representaciones verbales de  $\varepsilon$  determinadas por: 1) tres puntos no alineados, 2) un punto y dos vectores paralelos al plano, 3) un punto y un vector normal, 4) dos rectas que se cortan y 5) por un punto y una recta que no lo contiene.

#### 4) Proyección de la utilización de las tareas en el PEA de la Geometría Analítica

Para la utilización de las tareas de aprendizaje en el PEA con el propósito de elaborar o fijar los procedimientos de transferencia entre representaciones verbales del plano es necesario:

- Ordenar las transferencias, atendiendo a su nivel de

complejidad, para su uso en el PEA.

- Distribuir las transferencias por formas organizativas (FO) del PEA (fundamentalmente la clase y la autopreparación) y por tipos de clases (conferencias y clases prácticas o encuentros). Se utilizó también el trabajo extraclase como tipo de evaluación parcial (Tabla 3).

Tabla 3: Distribución de las transferencias entre representaciones en el PEA

Tipo de actividad	Transferencias
<i>Conferencias</i>	1, 2, 6 y 11
<i>Clases prácticas</i>	3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14 y 15
<i>Autopreparación</i>	7, 12, 16, 17, 18, 19 y 20
<i>Trabajo extraclase</i>	21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 y 30

Fuente: Elaboración propia

- Seleccionar las tareas a realizar por los estudiantes en cada forma organizativa y tipo de clase, así como las que deben resolver en trabajo extraclase.
- Incluir las tareas en la planificación de las actividades del PEA de la Geometría Analítica.

acciones del programa heurístico general.

A este programa los autores de este artículo lo han denominado Programa Heurístico para la Transferencia entre Representaciones de Objetos de la Geometría Analítica (PH-Teroga).

#### 5) Elaboración y aplicación de procedimientos de transferencia

La elaboración de procedimientos de transferencia requiere de la aplicación de un programa heurístico particular donde se concreten las etapas y

En el PH-Teroga se inserta un sistema de preguntas con carácter heurístico (SPCH) como un sistema de reglas o sugerencias heurísticas que favorecen la Teroga.

El PH-Teroga se elabora en el estudio de la recta utilizando tareas que

exigen transferencia entre representaciones cuyo procedimiento de transferencia no es conocido por los estudiantes. Las fases fundamentales y acciones principales del PH-Teroga y el SPCH se exponen en las tablas 4 y 5.

Las preguntas del SPCH contribuyen a la ejecución de las acciones principales del PH-Teroga y se insertan en sus fases. Entre las fases de este programa existen relaciones sincrónicas y diacrónicas porque unas preceden a las otras, pero también se entremezclan en su transcurso.

Tabla 4: Fases fundamentales y acciones principales del PH-Teroga

Fases	Acciones principales
1. Comprensión de la tarea de transferencia.	Reconocer que se trata de un ejercicio o problema de transferencia. Identificar la RD y la RB. Identificar el tipo y la forma de la RD y la RB. Identificar el tipo de transferencia a realizar (intrasistema o intersistemas, intratipo o intertipos). Representar simbólicamente la transferencia.
2. Elaboración de un procedimiento de transferencia	Determinar los medios a utilizar para realizar la transferencia. Decidir si se puede realizar una transferencia directa o es imprescindible realizar una transferencia compuesta. Elaborar un procedimiento de transferencia. Fundamentar el procedimiento.
3. Realización de la transferencia	Ejecutar el procedimiento de transferencia. Tomar decisiones ejecutivas.
4. Evaluación del proceso de transferencia	Comprobar si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado. Determinar si la representación obtenida es única o existen varias representaciones del mismo objeto que satisfacen las exigencias de la tarea de aprendizaje. Determinar si existen otros procedimientos para realizar la transferencia. Valorar si el procedimiento aplicado se puede generalizar a todas las tareas del mismo tipo que la resuelta. Formular nuevos ejercicios o problemas de transferencia.

Fuente: Tesis doctoral Quero (2018, p.77)

Tabla 5: Preguntas con carácter heurístico por fases del PH-Teroga

Fases fundamentales	SPCH
---------------------	------

1. Comprensión de la tarea de transferencia	<p>¿Cuál es el objeto geométrico?</p> <p>¿Se trata de una tarea de transferencia entre representaciones de un objeto de la Geometría Analítica?</p> <p>¿De qué tipo es la RD? ¿Qué forma tiene la RD?</p> <p>¿Qué datos tengo de la RD? ¿De qué tipo es la RB?</p> <p>¿Qué forma tiene la RB?</p> <p>¿De qué tipo es la transferencia a realizar?</p>
2. Selección o elaboración de un procedimiento para la transferencia	<p>¿Debo realizar la transferencia con lápiz y papel o puedo utilizar un software?</p> <p>¿Puedo pasar directamente de la RD a la RB?</p> <p>¿Es útil obtener una representación intermedia?</p> <p>¿Cómo puedo obtener la RB a partir de la RD?</p> <p>¿Cómo justifico el procedimiento seguido?</p>
3. Realización de la transferencia	<p>¿Qué hago para ejecutar cada paso del procedimiento?</p> <p>¿Qué utilidad tiene el resultado parcial que obtengo al ejecutar cada paso?</p>
4. Evaluación del proceso de transferencia	<p>¿Satisface la representación obtenida las exigencias de la tarea?</p> <p>¿Cómo lo puedo comprobar?</p> <p>¿Es única la representación obtenida?</p> <p>¿Se pueden utilizar otros medios para realizar la transferencia?</p> <p>¿Cómo procedo si utilizo otros medios?</p> <p>¿El procedimiento aplicado se puede utilizar en todas las tareas del mismo tipo que la resuelta?</p> <p>¿Existe otra forma de proceder utilizando los mismos medios?</p> <p>¿Qué nuevas tareas puedo plantear a partir de la tarea resuelta?</p>

Fuente: Tesis doctoral Quero (2018, p.78)

La elaboración de procedimientos de transferencia ocurre durante la resolución de tareas de aprendizaje que exigen transferencia entre representaciones cuyos procedimientos son desconocidos por el estudiante y la resolución de estas tareas transcurre según las funciones didácticas.

La aplicación de los procedimientos de transferencia debe tener lugar durante la resolución de tareas que exigen transferencia entre representaciones verbales del plano cuyos procedimientos el estudiante conoce y transcurre según las funciones didácticas.

## 6) Evaluación del desempeño

La evaluación es uno de los eslabones del PEA y respecto a su ejecución son importantes las respuestas a las preguntas ¿qué?, ¿cuándo y ¿cómo evaluar?

En cuanto al ¿qué evaluar?, se deben atender cinco objetos interrelacionados: 1) las condiciones previas necesarias para elaborar o aplicar un procedimiento de transferencia entre representaciones verbales del plano, incluido el conocimiento del PH-Teroga y del sistema de preguntas con carácter heurístico, 2) la habilidad para aplicar el PH-Teroga, 3) las habilidades para aplicar los procedimientos de transferencia elaborados, 4) características de la esfera afectivo-motivacional de la personalidad imbricadas en los objetos anteriores y 5) la comunicación a propósito de la transferencia entre representaciones.

La evaluación de las condiciones previas necesarias para elaborar o aplicar un procedimiento de transferencia entre representaciones verbales del plano forma parte de la función didáctica de aseguramiento del nivel de partida.

La habilidad para aplicar el PH-Teroga debe ser evaluada en la resolución de

una tarea que exige transferencia entre representaciones verbales del plano cuando se desconoce el procedimiento de transferencia necesario, es decir, en tareas del tipo 2, 4, 6, 8, 10 o 12 (Tabla 2).

Para obtener datos que propicien hacer inferencias acerca del dominio de esta habilidad, el profesor debe observar la actuación de sus estudiantes mientras resuelven las tareas y de ser necesario ha de realizar un análisis de los productos de la actividad ejecutada, a partir de la recogida de la libreta de notas o de cualquier otro soporte, donde esté registrada la información generada durante la resolución de las tareas.

La evaluación de las habilidades para aplicar los procedimientos de transferencia elaborados debe realizarse cuando se resuelven tareas que exigen un procedimiento de transferencia conocido, es decir, tareas de los tipos 1, 3, 5, 7, 9 o 11 (Tabla 2). En ello el profesor puede utilizar los mismos métodos que en la evaluación de la habilidad para aplicar el PH-Teroga.

En la esfera afectivo-motivacional debe valorarse el interés por resolver las tareas, la perseverancia ante la

complejidad de las tareas, la actitud ante las críticas de los demás y el estado de ánimo durante la resolución de las tareas.

Con relación a la comunicación, debe evaluarse la comunicación con el profesor, la comunicación con los compañeros de clase y la comunicación matemática oral

### **METODOLOGÍA EMPLEADA**

Entre los métodos utilizados en la investigación que originó el artículo se encuentran el histórico-lógico, analítico-sintético y el inductivo-deductivo.

El uso de estos métodos permitió identificar las principales tendencias cubanas e internacionales acerca de las concepciones de los tres conceptos centrales de la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos: representación, transferencia entre representaciones y sistema de representación. A partir de una sistematización de estas tendencias los autores realizaron una reconceptualización de estos tres conceptos para su uso en el PEA de la Geometría Analítica e introdujeron los conceptos de tipo y forma de

representación en el sentido en que ellos son usados en este artículo.

El procedimiento didáctico que se expone aquí está basado en los fundamentos teóricos desarrollados por los autores. En este procedimiento se utiliza como método matemático la regla del producto de la teoría combinatoria para la determinación de las transferencias entre representaciones verbales del plano. También se emplea este método para la determinación de los tipos de tareas a partir de las variables de tareas consideradas.

Para la medición del aprendizaje alcanzado acerca de la transferencia entre representaciones verbales del plano se utilizaron como métodos el análisis de los productos del proceso pedagógico, la observación, las pruebas pedagógicas y el análisis de tablas de frecuencias.

### **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

El procedimiento didáctico expuesto en la sección anterior ha sido aplicado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación de profesores de Matemática en la Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”. En

su elaboración se utilizó la evaluación. En el pre-experimento se utilizó como variable de estudio el desempeño de los estudiantes en la transferencia entre representaciones verbales del plano, como unidad de estudio el estudiante que se forma como profesor de Matemática en la licenciatura en Educación, perfil Matemática, y como unidad de análisis la tarea que exige transferencia entre representaciones verbales del plano. La investigación se desarrolló con los 14 estudiantes del único grupo del tercer año de la carrera

El diseño de la medición de la variable de estudio se realizó según el procedimiento propuesto por Ruiz (2006): 1) definición de la variable, 2) determinación de las dimensiones y de los indicadores de cada dimensión, 3) modelación de los indicadores mediante variables estadísticas, 4) establecimiento de los criterios de medición de los indicadores y su representación en matrices de valoración, 5) diseño de los instrumentos de medición y evaluación de su validez y confiabilidad y 6) diseño de la

medición de las dimensiones y de la variable.

Las dimensiones de la variable de estudio son: 1) dimensión cognitivo-procedimental, 2) dimensión afectivo-motivacional y 3) dimensión motivacional. En la dimensión cognitivo-procedimental se consideran dos subdimensiones: 1.1) elaboración de procedimientos de transferencia y 1.2) aplicación de procedimientos de transferencia. La primera subdimensión tiene 10 indicadores y la segunda seis (tablas 6 y 7).

Los indicadores de la dimensión afectivo-motivacional son: 2.1) interés por resolver las tareas, 2.2) perseverancia ante la complejidad de las tareas, 2.3) actitud ante las críticas de los demás y 2.4) estado de ánimo durante la resolución de las tareas.

Los indicadores de la dimensión comunicacional son: 3.1) atención prestada a las explicaciones del profesor, 3.2) actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor, 3.3) colaboración con los compañeros de clase, 3.4) atención prestada a las explicaciones de los compañeros de clase, 3.5) actuación ante las interrogantes formuladas por sus compañeros de clase y 3.6)

utilización de la terminología (López, 2020), que contienen los criterios utilizados.

A cada indicador se le asoció una variable estadística, cuya escala de medición está compuesta por las categorías: alto, medio y bajo. Para la medición de los indicadores se utilizaron matrices de valoración

Los resultados obtenidos en la medición de los indicadores de la dimensión cognitivo-procedimental a los 14 estudiantes que se forman como profesores de Matemática se exponen en las tablas 6 y 7.

Tabla 6: Resultados de la medición de los indicadores de la subdimensión “Elaboración de procedimientos de transferencia”

Indicador	Alto	%	Medio	%	Bajo	%
1.1.1) Identificación del tipo y la forma de la RD y la RB	4	28,6	10	71,4	0	0
1.1.2) Identificación del tipo de transferencia a realizar	3	21,4	10	71,4	1	7,1
1.1.3) Elaboración de un procedimiento de transferencia	5	35,7	5	35,7	4	28,6
1.1.4) Fundamentación del procedimiento	4	28,6	5	35,7	5	35,7
1.1.5) Ejecución del procedimiento con lápiz y papel	5	35,7	5	35,7	4	28,6
1.1.6) Ejecución del procedimiento con software	4	28,6	6	42,9	4	28,6
1.1.7) Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado	1	7,2	8	57,1	5	35,7
1.1.8) Determinación de si la representación obtenida es única	5	35,7	4	28,6	5	36
1.1.9) Determinación de si existen otros procedimientos para realizar la transferencia	5	35,7	3	21,4	6	42,9
1.1.10) Formulación de nuevos ejercicios o problemas de transferencia	3	21,4	4	28,6	7	50,0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 7: Resultados de la medición de los indicadores de la subdimensión “Aplicación de procedimientos de transferencia”

Indicador	Alto	%	Medio	%	Bajo	%
1.2.1) Identificación del tipo y la forma de la RD y la RB	12	85,7	2	14,3	0	0
1.2.2) Conocimiento de los pasos del procedimiento	10	71,4	4	28,6	0	0
1.2.3) Ejecución del procedimiento con lápiz y papel	6	42,9	8	57,1	0	0
1.2.4) Ejecución del procedimiento	6	42,9	5	35,7	3	21,4

con software						
1.2.5) Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado	2	14,3	7	50,0	5	35,7
1.2.6) Determinación de si la representación obtenida es única	5	35,7	5	35,7	4	28,6

Fuente: Elaboración propia

En la subdimensión “Elaboración de procedimientos de transferencia” los indicadores con mayor frecuencia de las categorías alto o medio son:

- Identificación del tipo y la forma de la representación dada y la representación buscada.
- Identificación del tipo de transferencia a realizar.

Los indicadores con menor frecuencia de las categorías alto o medio son:

- Formulación de nuevos ejercicios o problemas de transferencia; solo tres estudiantes en la categoría alto. Siete estudiantes no formularon nuevos ejercicios o lo hicieron de forma incorrecta.
- Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado; solo un estudiante en la categoría alto. Cinco estudiantes no comprobaron o no explicaron correctamente.

Respecto a la dimensión “Aplicación de procedimientos de transferencia”,

los indicadores con mayor frecuencia de las categorías alto o medio son:

- Identificación del tipo y la forma de la representación dada y la representación buscada.
- Conocimiento de los pasos del procedimiento.
- Ejecución del procedimiento con lápiz y papel.

Los indicadores con menor frecuencia de las categorías alto o medio son:

- Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado.
- Determinación de si la representación obtenida es única. Cuatro estudiantes no determinaron si la representación es única.

Se identificaron los errores cognitivos siguientes:

- Subdeterminación de la representación: utilización de representaciones verbales que no determinan de forma única al plano.

- Sobredeterminación de la representación: inclusión de características del plano no necesarias en su representación verbal.
  - Determinación de una representación incompatible: representación de un plano que no le corresponde a la representación dada.
  - Otros errores, entre ellos errores de cálculo al determinar coordenadas de puntos que satisfacen la ecuación del plano, al resolver sistemas de ecuaciones y al operar con vectores.
- Los resultados obtenidos en la medición de los indicadores de la dimensión afectivo-motivacional se exponen en la Tabla 8.

Tabla 8: Resultados de la medición de los indicadores de la dimensión afectivo-motivacional

Indicador	Alto	%	Medio	%	Bajo	%
2.1) Interés por resolver las tareas de las clases prácticas	7	50,0	5	35,7	2	14,3
2.2) Perseverancia ante la complejidad de las tareas	5	35,7	6	42,9	3	21,4
2.3) Actitud ante las críticas de los demás	5	35,7	8	57,1	1	7,2
2.4) Estado de ánimo durante la resolución de las tareas	5	35,7	8	57,1	1	7,2

Fuente: Elaboración propia

- Los indicadores con mayor frecuencia de las categorías alto o medio son:
- Actitud ante las críticas de los demás.
  - Estado de ánimo durante la resolución de las tareas.
- Los resultados obtenidos en la medición de los indicadores de la dimensión comunicacional se exponen en la Tabla 9.

Tabla 9: Resultados de la medición de los indicadores de la dimensión comunicacional

Indicador	Alto	%	Medio	%	Bajo	%
3.1) Atención prestada a las explicaciones del profesor	8	57,1	5	35,7	1	7,2
3.2) Actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor	4	28,6	6	42,8	4	28,6
3.3) Colaboración con los compañeros de clase	5	35,7	7	50,0	2	14,3

3.4) Atención prestada a las explicaciones de los compañeros de clase	6	42,9	6	42,9	2	14,3
3.5) Actuación ante las interrogantes formuladas por sus compañeros de clase	8	57,1	4	28,6	2	14,3
3.6) Utilización de la terminología matemática	4	28,6	6	42,9	4	28,6

Fuente: Elaboración propia

El indicador con mayor frecuencia de las categorías alto o medio es “Atención prestada a las explicaciones del profesor” y el de menor frecuencia es “Utilización de la terminología matemática” pues cuatro estudiantes cometieron más de dos errores.

## CONCLUSIONES

El papel de las representaciones de los objetos matemáticos en el PEA de la Matemática ha sido un tema de interés de los investigadores en didáctica de la Matemática desde la década de los 70 del siglo XX, pero en Cuba se incorporó en los lineamientos para el trabajo en la asignatura tardíamente en la segunda década del siglo XXI y la investigación en este tema es escasa e incipiente y se ha centrado en el tema de las funciones.

El procedimiento didáctico para la transferencia entre representaciones verbales del plano en la formación de profesores de Matemática propuesto por los autores de este artículo incluye las acciones fundamentales dirigidas

a la planificación y la dinámica del PEA de este contenido.

Los resultados en la medición del desempeño de los estudiantes que se forman como profesores de Matemática en la transferencia entre representaciones verbales del plano donde se implementó experimentalmente el procedimiento didáctico propuesto, demuestra la efectividad de este procedimiento en la muestra estudiada. A pesar de ello se observaron limitaciones para comprobar si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado, determinar si la representación obtenida es única, formulación de nuevos ejercicios o problemas de transferencia y en la

utilización de la terminología matemática.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, M., Almeida, B. y Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática. Documentos metodológicos*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.
- Amaya, T. y Medina, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación Matemática*, 25(2), 119-140. Recuperado de <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/volumen25-numero2>.
- Amaya, T., Pino Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Revista Educación Matemática*, 28(3), 111-144. Recuperado de <https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/volumen28-numero3>.
- Cañizares, E. (2010). *La formación y desarrollo de la habilidad para transferir entre representaciones analíticas y gráfica de funciones cuadráticas en estudiantes de décimo grado (Tesis de maestría)*. Universidad de Ciencias Pedagógicas “Silverio Blanco Núñez”, Sancti Spíritus, Cuba.
- Douady, R. (2000). Juego de marcos y dialéctica herramienta-objeto. En G. Castrillón (Ed.), *Ingeniería didáctica* (pp. 171-177) [versión electrónica]. Santiago de Cali. Colombia.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9 (1), 143–168. Recuperado de <https://eudml.org/doc/44160>
- Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las

- matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz Ludlow. *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp.61- 94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”. Recuperado de [https://die.udistrital.edu.co/publicaciones/comension\\_y\\_aprendizaje\\_en\\_matematicas\\_perspectivas\\_semioticas\\_seleccionadas](https://die.udistrital.edu.co/publicaciones/comension_y_aprendizaje_en_matematicas_perspectivas_semioticas_seleccionadas)
- Gómez, M. (2005). *Una propuesta didáctica para elevar los niveles de transferencia entre las distintas representaciones de las funciones, en el nivel preuniversitario* (Tesis de doctorado). Instituto Superior Pedagógico “Enrique J. Varona”, La Habana, Cuba.
- Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments* (Tesis de doctorado). University of Nottingham. Nottingham, United Kingdom.
- Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, New Jersey : Erlbaum.
- Leyva, T. (2012). *Propuesta didáctica para elevar los niveles de transferencia entre las distintas representaciones de las funciones reales de una variable real, en el tema de funciones en el primer año de la Universidad de Ciencias Informáticas* (Tesis de maestría). Instituto Superior Politécnico “José Antonio Echeverría”. La Habana, Cuba.
- López, J. C. (2020). Rúbricas, evaluación más allá de la calificación. *Edukafé, Documentos de Trabajo de la Escuela*, (9). Recuperado de <http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/rubricas>
- Meza, F. y Amaya, T. (2017). Conflictos epistémicos al hacer transformaciones en las representaciones de una función. *Revista Entornos*, 29(1), 43-53. Recuperado de <https://journalusco.edu.co/index.php/entornos>.
- Mullis, A., Martin, M. (2020). *Timss*

2019. *Marcos de la Evaluación*. Madrid, España: Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Recuperado de [https://sede.educacion.gob.es/publiventa/descarga.action?codigo\\_agc=21779](https://sede.educacion.gob.es/publiventa/descarga.action?codigo_agc=21779)
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: Autor.
- Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal* (Tesis de maestría). Universidad autónoma de Manizales, Colombia. Recuperado de <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/245/1/Tesis>
- Quero, O. (2018). *La transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática* (Tesis de doctorado). Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez", Sancti Spíritus, Cuba.
- Quero, O. y Ruiz, A. (2016). Transferencias entre representaciones verbales de las secciones cónicas en la formación del profesor de Matemática. *Pedagogía y Sociedad*, 19 (47), 19-37. Recuperado de <http://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad/article/view/499>.
- Quero, O. y Ruiz, A. (2018). Determinación de procedimientos de transferencia entre representaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica. *Unión*, 52, 118-143. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2018/52/05.pdf>
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática* 4(1), 1-14.
- Ruiz, A. (2006). Procedimientos y medios para relacionar constructos, dimensiones, indicadores y medición en la

investigación pedagógica  
(curso post-evento). En A.  
Chinea, J. Medina e I. Cabezas  
(Eds.). *Actas del Evento  
Provincial Pedagogía 2007* (pp.

50-78). *Instituto Superior  
Pedagógico "Silverio Blanco".  
Sancti Spíritus, Cuba: Órgano  
Editor Educación Cubana.*

Pedagogía y Sociedad publica sus artículos bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional](#)

