



Recibido: 11/1/2022, Aceptado: 6/3/2022, Publicado: 13/7/2022


## Artículo original

### Los métodos numéricos como herramienta en la enseñanza de la Física

Numerical methods as a tool in the teaching of physics


Dayned Rega Armas<sup>1</sup>

E-mail: [drega@uniss.edu.cu](mailto:drega@uniss.edu.cu)

 <https://0000-0002-4078-2217>


Yusimí Guerra Véliz<sup>2</sup>

E-mail: [yusimig@uclv.edu.cu](mailto:yusimig@uclv.edu.cu)

 <https://0000-0002-1711-5686>

Julio Leyva Haza<sup>2</sup>

E-mail: [haza@uclv.edu.cu](mailto:haza@uclv.edu.cu)

 <https://0000-0002-6616-7095>

<sup>1</sup>Universidad de Sancti Spíritus: "José Martí Pérez", Facultad de Ciencias Pedagógicas, Sancti Spíritus, Cuba.

<sup>2</sup>Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Departamento de Ciencias Exactas. Villa Clara, Cuba.

---

#### ¿Cómo citar este artículo? (APA, Séptima edición)

Rega Armas, D., Guerra Véliz, Y. y Leyva Haza, J. (julio-octubre, 2022). Los métodos numéricos como herramienta en la enseñanza de la Física. *Pedagogía y Sociedad*, 25 (64), 226-247. <http://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad/article/view/1509>

---

#### RESUMEN

**Introducción:** En la enseñanza de la física, utilizar tanto métodos exactos como numéricos complementándose como un todo, permite que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más completo.

**Objetivo:** mostrar las ideas centrales para introducir un método numérico, Bisección, en la resolución de problemas en la asignatura de Física con la utilización del Excel, en la carrera Ingeniería Agrónoma.

**Métodos:** del nivel teórico, empírico y matemático-estadístico, estos fueron seleccionados y desarrollados a partir de las exigencias del enfoque dialéctico-materialista.

**Resultados:** se evaluó el desempeño de los estudiantes en la solución de los problemas utilizando métodos numéricos y el Excel, y se demostró la validez de la propuesta didáctica empleada.

**Conclusiones:** con la aplicación de los métodos numéricos y el Excel se logró un avance cuantitativo en el nivel de aprendizaje de los contenidos de la Física, pues la mayor cantidad de estudiantes logran solucionar los problemas con la utilización de estos métodos.

**Palabras clave:** física; matemática numérica; resolución de problemas

## ABSTRACT

**Introduction:** In the teaching of physics, using both exact and numerical methods, complementing each other as a whole, makes the teaching-learning process more complete.

**Objective:** to show the main ideas to introduce a numerical method: Bisection, in the resolution of problems in the subject of Physics with the use of Excel, in the agricultural engineering major.

**Methods:** of the theoretical, empirical and mathematical-statistical levels were applied; these were selected and developed from the demands of the dialectical-materialist approach.

**Result:** the students' performance as to solving problems was evaluated using numerical methods and Excel, demonstrating the validity of the didactic proposal used.

A quantitative advance in the level of learning of the contents of Physics was achieved with the application of numerical methods and Excel, since most of the students manage to solve problems with the use of the aforementioned tools.

**Keywords:** numerical mathematics; physics; solution of problems

## Introducción

El desarrollo de las tecnologías de la información y las comunicaciones impone nuevos retos a la enseñanza universitaria. En particular al proceso de enseñanza-aprendizaje. El proceso de enseñanza de la Física General está llamado a enfrentar cambios que repercuten en la didáctica que lo sustenta.

Mientras que en los objetivos generales de la disciplina Física General para las carreras de ingeniería se exige el uso de las tecnologías y la solución de

problemas actuales de la especialidad, en los que se apliquen los contenidos de Física General, el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje se realiza mayoritariamente de forma tradicional. Así, la mayoría de las tareas de aprendizaje de Física General que se presentan a los estudiantes, requieren solamente el uso de métodos exactos o problemas de números bonitos, los cuales raras veces aparecen en la realidad.

Muchos problemas de ingeniería, en los que se aplica la Física General, surgen a partir de situaciones concretas cuyo punto de partida es un conjunto de datos tomados de la realidad o son modelados por funciones, a las cuales, en primera instancia, no es posible aplicar los métodos exactos de la matemática para su procesamiento y solución. Ello lleva a la necesidad de aplicar métodos numéricos, los que, a su vez, dado el gran volumen de cálculos que les son inherentes, requieren el uso de la computadora.

Al aplicar los métodos numéricos y el Excel en la resolución de problemas de Física tengan o no solución por vía exacta, el estudiante tiene otra vía para resolver los problemas, además a través del uso de los métodos numéricos llegan a comprender que los adelantos tecnológicos como enviar cohetes al espacio, lanzamiento de proyectiles, drones, robots, construcción de circuitos integrados, teléfonos celulares, GPS y muchos otros relacionados con la Física, no pudieran existir sin métodos numéricos y se logra que el estudiante se vincule con el carácter aproximado de la realidad y la perspectiva del error.

Por tales razones, se hace cada vez más necesario, la aplicación de métodos numéricos y el uso de la informática como herramientas para la enseñanza de la Física General en las carreras de ingeniería.

Especialistas de diferentes países como: Benacka (2008), Guerra Véliz (2008), Gaik Tay et al. (2013), Mora Flores (2016), Mañas y Pinta (2018), Lima et al. (2020), Chapra y Clough (2021), entre otros, se han percatado de la necesidad de incluir los métodos numéricos en los cursos de Física en diversos niveles educacionales y constituye una tendencia en el ámbito internacional; lo que permite un análisis más profundo del tema que se ha desarrollado en dos direcciones. La primera dirigida a la formación de científicos e ingenieros, y la

segunda a los niveles de enseñanza en que se estudia la Física con menos profundidad.

En el primer caso se propone usar métodos numéricos para resolver problemas complejos que no tienen solución por otra vía. La segunda dirección, aunque concibe el trabajo con métodos numéricos más simples, tiene aún un desarrollo incipiente, por lo que se limita a ofrecer ejemplos aislados de problemas físicos. Un trabajo con un enfoque más general, es el realizado en Cuba por Guerra Véliz (2008). Este presenta un modelo didáctico que se refiere no a ejemplos particulares sino a una concepción integral del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física General y realiza importantes aportaciones en cuanto a la estructura del enunciado de las tareas de aprendizaje y la estructura del método de solución de dichas tareas, sin embargo, tiene dos limitantes fundamentales cuando se trata de aplicar a las carreras de ingeniería. La primera radica en que ha sido concebido para la carrera de formación de profesores de Física para la enseñanza media y la segunda que se centra más en los métodos numéricos que en el uso de Excel, aspectos que no hacen posible su aplicación inmediata como modelo didáctico en las carreras de ingeniería.

El objetivo de este artículo es mostrar las ideas centrales para introducir un método numérico, Bisección, en la resolución de problemas en la asignatura de Física, en la carrera de Ingeniería Agrónoma y mostrar un ejemplo de problema resuelto.

### **Marco teórico o referentes conceptuales**

Los entes materiales y fenómenos naturales son objetivos. En el proceso de investigación científica el hombre interactúa con ellos convirtiéndolos en objeto de su actividad cognoscitiva como resultado de la cual asimila teóricamente el objeto y lo transforma.

Las construcciones de la ciencia Física constituyen el reflejo de la realidad estudiada. Tal reflejo es profundo, organizado, coherente y constituye el resultado de la actividad práctica de muchos científicos.

El conocimiento de los objetos, procesos o fenómenos físicos se obtiene a partir de modelos de la parte de la realidad estudiada. La cuantificación de

dichos modelos se logra con la definición de magnitudes y dependencias entre ellas que se concretan en modelos matemáticos. En estos, cada elemento (variable, constante, signo...) y cada parte (ecuación, función, sistema de ecuaciones o funciones...) tiene un sentido físico estricto. Al tránsito de un modelo matemático a otro o a la determinación del valor de las magnitudes presentes en el modelo dado se llega a partir de operaciones matemáticas que de igual modo tienen sentido físico estricto. También, puede irse desde las magnitudes cuantificadas hasta el establecimiento del modelo. En todo este proceso la física habla a través de la matemática. Se dice que la matemática es el lenguaje de la física, no una matemática que comporta solo las estrictas formas y relaciones cuantitativas de los objetos abordados sino portadora, además, de un estricto sentido físico.

La matemática exacta se ocupa de demostrar la existencia de la solución de un problema y señalar el proceso que obtiene una solución; sin embargo, para muchos problemas la segunda cuestión queda sin resolver, aun cuando se garantiza, desde el punto de vista teórico, que tal solución existe. Asimismo, puede ocurrir que se brinde el algoritmo del proceso al que obtiene la solución, pero que este sea demasiado largo y, en consecuencia, inutilizable desde el punto de vista práctico.

En auxilio de tales dificultades aparece la matemática numérica que tiene como objetivo la búsqueda de algoritmos aproximados de cálculo para todos aquellos casos en que la existencia de la solución esté garantizada desde el punto de vista teórico, se conozca o no un algoritmo exacto para resolverlo. Para ello sustituye el problema inicial por otro más simple de aquí que la solución encontrada por esta vía resulte aproximada respecto al problema original. La solución por vía numérica se reduce a la realización de operaciones aritméticas y lógicas sobre los números.

Los métodos exactos posibilitan arribar a importantes generalizaciones teóricas, pero los numéricos permiten pasar de los datos obtenidos en las mediciones al modelo matemático que expresa sus relaciones y comprobar en la práctica el modelo teórico propuesto.

Chapra y Clough (2021), resumen varias razones de carácter didáctico y epistemológico, que evidencian la necesidad de usar los métodos numéricos en las carreras de ingeniería: una de ellas es la potencialidad de estos métodos en la resolución de problemas. Al respecto destaca que “son capaces de manipular sistemas de ecuaciones grandes, manejar no linealidades y resolver geometrías complicadas” (p.5).

Durante la construcción del aparato teórico de las ciencias exactas los métodos numéricos y exactos son igualmente importantes, se excluyen y complementan conformando una unidad dialéctica.

No obstante, actualmente en la enseñanza de las ciencias, predominan los métodos exactos. Como resultado, los estudiantes asumen los conocimientos científicos como una descripción exacta de la realidad y obvian el carácter relativo de dichos conocimientos, que tan importante es para estimular la inconformidad que lleva a la búsqueda de nuevos conocimientos y a la profundización de los existentes. Esta dificultad puede resolverse incluyendo en la enseñanza de las ciencias, los métodos numéricos conjuntamente con los exactos.

Los métodos numéricos no se usaban con tanta frecuencia, a pesar de la exactitud de sus soluciones y las múltiples ventajas que poseen, debido a los muchos cálculos que requieren cada uno de ellos. Pero al comenzar el vertiginoso avance de las tecnologías y el uso de las computadoras, el empleo de los métodos numéricos se hizo mucho más viable.

Al respecto, Chapra y Clough (2021), señalan:

En la actualidad, las computadoras y los métodos numéricos ofrecen una alternativa para los cálculos complicados. Al usar la potencia de la computadora se obtienen soluciones directamente, de esta manera se pueden aproximar los cálculos sin tener que recurrir a consideraciones de simplificación o a técnicas muy lentas. Aunque las soluciones analíticas aún son muy valiosas, tanto para resolver problemas como para brindar una mayor comprensión, los métodos numéricos representan opciones que aumentan, en forma considerable, la capacidad para enfrentar y resolver los problemas; como resultado, se

dispone de más tiempo para aprovechar las habilidades creativas personales. En consecuencia, es posible dar más importancia a la formulación de un problema y a la interpretación de la solución. (p.4)

Sobre el tema Rega Armas (2017) explica:

Para implementar los métodos numéricos y aprovechar los múltiples beneficios que ellos nos brindan, es necesaria la utilización de las computadoras. Existen múltiples programas que pueden ser usados para trabajar los métodos numéricos, uno de ellos es el Excel de Microsoft que posee varias ventajas con respecto a otros programas. (p.3)

Microsoft Office es una de las aplicaciones más usadas en la actualidad y Cuba no está excluida de esto. Excel es parte del paquete de este sistema.

Al respecto, Oliveira y Nápoles, (2013) señalan:

Aunque Excel es probablemente la hoja de cálculo más utilizada en el mundo debemos resaltar que dentro del llamado software libre existe una aplicación: Open Office.org que equivale al Excel de Microsoft Office ya que contiene características similares y se pueden adaptar al Excel. (p. 2)

El Excel como software ha sido empleado en la enseñanza y aprendizaje de disímiles materias dentro de ellas matemáticas y físicas, en la revista: *Spreadsheets in Education*, se recogen muchas de las experiencias al usar las hojas de cálculo en la enseñanza. Una de ellas es el artículo del autor Christopher (2006), en este, él explica como las hojas de cálculo son una excelente herramienta para que los estudiantes comiencen su aprendizaje de métodos numéricos pues es un instrumento fácil para construir ejemplos ilustrativos, experimentar con ellos y graficar los mismos.

Según Oliva (2017) las ventajas al operar con hojas de cálculo de Excel son variadas. Una de ellas, es que facilita entender mejor las operaciones y fórmulas matemáticas, pues en las celdas nos muestra todo el proceso antes de llegar a un resultado determinado. Otra ventaja es que llevan incorporado fórmulas que nos ahorran la elaboración de cálculos largos y complejos para llegar a una respuesta, esto a su vez lleva a un aumento de la productividad, minimizando la necesidad de personal altamente calificado; plantillas y

formatos predeterminados que facilitan la presentación u organización de datos.

La Física es una de las ciencias que estudia la naturaleza. Esta ciencia compone la realidad a partir de modelos y necesariamente tiene una estrecha relación con la matemática. Existen problemas de física que no pueden ser resueltos por métodos exactos, que sus soluciones no son seguras o que además las soluciones de estos problemas son muy engorrosas usando los métodos exactos.

Estos problemas se pueden encontrar en muchos libros de física, además los métodos numéricos se pueden usar para resolver situaciones problemáticas en casi la totalidad de los libros de física que se usan en la universidad y todos son resueltos por métodos exactos y en ocasiones no se hace ni referencia a que los problemas pudieran ser resueltos, con gran facilidad por métodos numéricos.

### **Metodología empleada**

En el desarrollo de la investigación se aplicaron diversos métodos, estos fueron seleccionados y desarrollados a partir de las exigencias del enfoque dialéctico materialista. Entre los métodos teóricos utilizados se destacan:

El analítico-sintético: permitió determinar las partes componentes del proceso de aprendizaje y su integración como un todo, para la implementación del método numérico de bisección, con la utilización del Excel, en el Proceso de aprendizaje de la Física, en el segundo año de la carrera Ingeniería Agrónoma.

Inductivo-deductivo: permitió procesar la información, establecer las generalizaciones y valorar el estado inicial en que se expresa el aprendizaje de la física, determinar los factores vinculados a este y las relaciones e interrelaciones existentes entre dichos factores.

Entre los métodos empíricos utilizados se encuentran:

La observación: se empleó sistemáticamente, lo que permitió apreciar la evolución de los estudiantes antes y después de la utilización de los métodos numéricos y el Excel en la solución de problemas de física.

El análisis de documentos: permitió analizar los escritos normativos: Modelo del Profesional, programas, libros de texto, expediente de asignatura, sistemas



de clase y libretas de los estudiantes para constatar las carencias y potencialidades con vistas a contribuir al mejoramiento del aprendizaje de física en la carrera Ingeniería Agrónoma.

La entrevista: permitió conocer cómo transcurre el aprendizaje de la física.

De los métodos estadísticos-matemáticos se utilizó la estadística descriptiva para corroborar la efectividad de la utilización de los métodos numéricos utilizando el Excel para la solución de problemas físicos, al comparar los resultados antes y después de su aplicación.

### **Resultados y discusión**

Se considera como muestra a los 18 estudiantes de la carrera Ingeniería Agrónoma de la Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”.

Antes de introducir en la resolución de problemas físicos la utilización del Excel y los métodos numéricos se realizó una entrevista y una prueba pedagógica con el objetivo de comprobar el nivel de conocimientos.

La entrevista grupal aplicada a los 18 estudiantes que cursaban el segundo año de la carrera Ingeniería Agrónoma propició obtener información de los estudiantes que integran la muestra acerca del aprendizaje de los contenidos de la Física. A continuación, se presenta una síntesis de las respuestas que estos ofrecieron:

- todos los entrevistados plantean que para la solución de las tareas consultan las notas de clases, en ocasiones el libro de texto, pero casi nunca se les orienta tareas que requieran del uso de las Tic y la hoja de cálculo Excel.
- en ocasiones hacen búsqueda de otras bibliografías como revistas, periódicos, entre otros.
- no siempre para la solución de las tareas se necesita relacionar los contenidos de la Física, la Matemática y la Informática.

Se aplicó una prueba pedagógica para conocer el estado en que se encontraba el aprendizaje de la Física, la prueba constaba de tres problemas todos del tema de mecánica, dos de las preguntas podrían ser resueltas por métodos exactos o numéricos y la tercera necesariamente necesitaba de los métodos numéricos. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Ocho estudiantes (44.4%) lograron enunciar y formular correctamente las ecuaciones y leyes de los temas preguntados, en las dos primeras preguntas.

Diez de los estudiantes (55.5%) seleccionaron correctamente las vías de solución a las problemáticas planteadas, en las dos primeras preguntas.

Todos los estudiantes (100%) expusieron que la tercera pregunta era imposible de resolver o que no tenía solución.

En síntesis, las principales limitaciones en el aprendizaje de la Física se expresan en:

- los estudiantes tienden a memorizar y no a aplicar los conocimientos.
- tienden a solucionar las tareas reproductivas que requieran de poco esfuerzo intelectual.
- no se implican de forma reflexiva en la búsqueda del conocimiento.
- no conocen ningún método numérico.
- No saben aplicar ningún método numérico, a la solución de problemas, pues a pesar de que en la asignatura de cálculo dada en primer año consta de un tema opcional sobre los métodos numéricos, no fue recibido por los estudiantes.

Cuando se habla de un antes de aplicar los métodos numéricos para la solución de problemas en física, en este caso el método de bisección, se tiene en cuenta que, a pesar de la importancia y beneficio de estos, los estudiantes no conocen los métodos numéricos, por lo que no saben que existe otra herramienta muy poderosa que puede resolver cualquier problema, no solo de física y que estos métodos están detrás de la mayoría de los adelantos del mundo moderno.

### **La propuesta didáctica del problema y la solución numérica con la utilización del Excel**

En la elaboración de las tareas docentes para la aplicación de los métodos numéricos. Se asumen las características propuestas por Guerra Véliz (2008, p.86).

Tales tareas se distinguirán porque en sus condiciones, el elemento distintivo es una función interobjeto y su exigencia, la realización de una operación matemática, que tiene sentido físico, sobre la función interobjeto. La vía para la

realización de dicha operación será la numérica, cuya particularidad distintiva es su carácter aproximado.

De acuerdo con el sistema de métodos que se proponen, las tareas deben constituir un problema, en el sentido psicológico que esta palabra encierra. Ello significa que para el estudiante no será posible realizar la operación matemática que le da solución, aun cuando pueda dar una explicación cualitativa del fenómeno o proceso físico de que se trate. Sin embargo, el alcance de la solución debe exigir del estudiante aplicar los conocimientos previos u otros que el profesor le oriente, cuya comprensión está dentro de su zona de desarrollo próximo. Así constituirán problemas asequibles.

Es necesario destacar que el objetivo de la investigación, no es enseñar métodos numéricos en la clase de física, pues la clase de física perdería su esencia convirtiéndose en una clase de matemática, la física para su estudio necesita necesariamente de la matemática pero de ambos métodos exactos y métodos numéricos, no solo para resolver problemas que solo pueden ser resueltos usando los métodos numéricos, sino también para ejemplificar algunos de los fenómenos de la naturaleza que la física describe.

La mecánica es uno de los temas de la asignatura Física y es la encargada de describir el movimiento de los cuerpos en movimiento y en reposo. En la mecánica el estudiante encuentra la explicación utilizando los modelos de la física y la matemática a una gran cantidad de problemas que aparecen en su vida diaria, tanto en la ciencia y la tecnología como formando parte del entorno que rodea al estudiante.

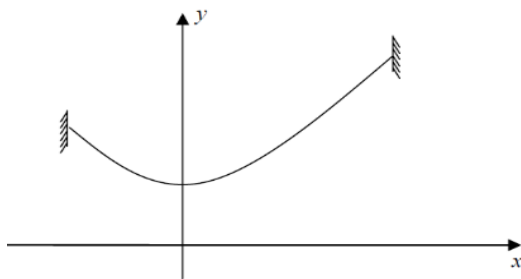
Los profesores de física y matemática deben tratar de vincular de la forma más estrecha posible los contenidos de su asignatura con el entorno que rodea al estudiante, con las cosas que él cada día ve quizás sin prestarle atención y que representan problemas de aplicación de las ingenierías a partir de los principios de las Ciencias Físicas y Matemáticas; uno de estos problemas es el relacionado con los cables suspendidos que encontramos tanto en una simple tendedera como en los cables conductores de la corriente eléctrica que nos rodean por todas partes, es precisamente este problema de un cable

suspendido el que conduce a la ecuación trascendente que presentamos de ejemplo en este artículo.

Problema:

Suponga que usted tiene un cable homogéneo y delgado, que cuelga de sus extremos y adquiere la forma que se muestra en la figura, se demuestra que la ecuación de la curva llamada catenaria viene dada por:  $y = L + a \cosh \frac{x}{a}$ , donde  $a$  y  $L$  son parámetros. Se permite medir en dos puntos las coordenadas de la catenaria que describe la forma adoptada por dicho cable. A partir de las dos mediciones realizadas obtenga el valor del parámetro  $a$ .

**Fig. 1** *Catenaria*



Solución:

Como condiciones se ofrece la forma general de la catenaria:  $y = L + a \cosh \frac{x}{a}$  y se ofrece la posibilidad de medir las coordenadas en dos puntos, lo que permite obtener dos pares ordenados  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ .

La incógnita del problema consiste en obtener la ecuación de la catenaria para el supuesto cable, lo que implica determinar los parámetros  $a$  y  $L$ , para sustituirlos en la ecuación general de la catenaria.

El parámetro  $a$  va a depender del peso por unidad de longitud del cable y de la tensión  $q$  que es sometido y  $L$  de la posición del sistema de referencia, el cual se encuentra colocado de manera que el origen de las coordenadas se ubique justamente debajo del punto de altura mínima. Como la ecuación solo contiene dos parámetros, midiendo la altura de un cable en dos puntos, se puede determinar ambos parámetros.

Esta situación puede ser reproducida en el laboratorio de física a nivel experimental de forma muy sencilla tomando dos bases, dos varillas que se empotrarían en esa base y dos presillas en los extremos superiores y atando un hilo por cada uno de sus extremos a las presillas de forma tal que nos represente la situación real. El hilo con las características necesarias; ser homogéneo y tener una densidad tal que produzca la curvatura que queremos que los estudiantes vean y que se ha representado gráficamente en el trabajo, de esta forma se puede medir con facilidad cada uno de los parámetros.

Por ejemplo, si la altura mínima es  $15\text{ m}$  y si  $10\text{ m}$  más allá la altura del cable es de  $17\text{ m}$ , entonces:

Para  $x = 0$  es  $y = 15$  y, por tanto  $L + a = 15$

Para  $x = 10$  es  $y = 17$  y, será  $L + a \cosh \frac{10}{a} = 17$

Con lo cual se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con solución única.

Basta restar ambas ecuaciones para eliminar la incógnita  $L$  y obtener:

$$a \cosh \frac{10}{a} - a = 2$$

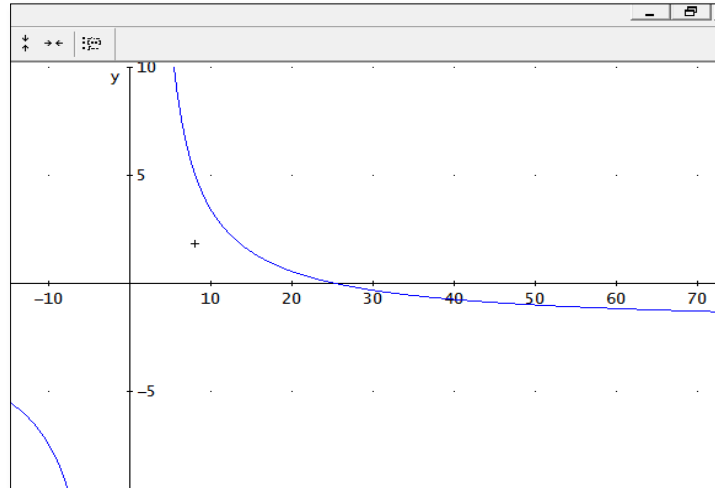
Ecuación cuya raíz da el valor de  $a$ , del cual resulta fácil determinar posteriormente el valor de  $L$ . Sin embargo, se está en presencia de una ecuación trascendente que no tiene solución por métodos exactos solamente puede ser resuelta usando métodos numéricos.

En el gráfico de la función  $y = x \cosh \frac{10}{x} - x - 2$ , figura 2, se muestra que está garantizada la continuidad de la función para el intervalo  $x > 0$ , pues es estrictamente decreciente. La existencia de su solución en un tramo se puede garantizar a partir del teorema de Bolzano que plantea, que si una función  $f(x)$  continua en un intervalo  $(a, b)$  tal que  $f(a)f(b) < 0$  entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ . Este teorema no garantiza la unicidad de la raíz, solo garantiza que al menos hay una.

En el gráfico de la función, se observa que para  $y = 0$ ,  $x$  toma un valor, la función corta el eje, entre 20 y 30, corta el eje.

Aquí lo más importante no es el intervalo sino el hecho de que en ese intervalo la solución es única.

**Fig. 2** Gráfico de la función  $y = x \cosh \left[ \frac{10}{x} \right] - x^2$



Para la realización de este problema el docente debe orientar a sus estudiantes previamente el estudio de bibliografía referente a los métodos numéricos y muy especialmente aquella que explica con detalle el método numérico que se empleara para dar solución al problema. Es importante resaltar, que el profesor debe motivar a sus estudiantes dándole razones del porqué es importante que ellos conozcan los métodos numéricos y sepan trabajar con alguno de ellos.

La bibliografía recomendada fue la siguiente:

- Revisar el libro Mecánica Teórica, del autor, U. M. Starzhinski (1980), en la página 495, aparece un problema relacionado con la curva de la catenaria donde se explica la solución del problema
- Buscar en el sitio web <http://numericalmethods.eng.usf.edu>, donde se encuentran ejemplos del método que se empleará en la solución del problema que se muestra, este sitio se encuentra en idioma inglés, lo que le permitirá a los estudiantes el desarrollo de habilidades en este idioma.
- Revisar en la ayuda del Excel la función lógica SI, debido a que con ella el uso del método de bisección, que es el método numérico que se empleará para dar solución del problema, es más factible, porque automatiza el método ahorrando tiempo.

- Estudiar con detenimiento un video tutorial realizado por la profesora, donde se explica el método numérico que se va a emplear, en este caso el método numérico bisección, y además el video contiene un ejemplo de un problema resuelto utilizando el método de bisección y el Excel.

Para la impartición de la asignatura se propuso un video tutorial realizado por la profesora, donde primeramente hace una breve introducción sobre la importancia de los métodos numéricos con el objetivo de motivar a los estudiantes, en un segundo momento explica detalladamente el método de bisección y da cuatro pasos a realizar para poder resolver un ejercicio por el método numérico de bisección y en un tercer momento explica con un problema ejemplo de física, como resolverlo en Excel, paso por paso para que el estudiante comprenda como debe proceder al resolver una situación problemática utilizando el método numérico de bisección y el Excel.

Como ya se abordó anteriormente este problema, necesita una solución por métodos numéricos, existen varios métodos numéricos, para la resolución de este problema, el método de bisección para la determinación de raíces fue el método numérico seleccionado.

Al resolver este problema utilizando Matemática Numérica se realizan muchos cálculos, que con lápiz y papel sería muy engorroso y el estudiante se centrarían más en hacer los cálculos que en lo que realmente importa, el aprendizaje de la física.

Es por esta razón que se utiliza el Excel de Microsoft por todas las posibilidades que brinda y que han sido explicadas anteriormente en este artículo.

Para utilizar el método de bisección es preciso determinar el intervalo  $(a_2; a_1)$ , esto fue muy sencillo con la utilización del Excel de Microsoft, se definió la función  $f(x) = x \cosh \frac{10}{x} - x - 2$  se igualó a cero y se obtuvo  $0 = x \cosh \frac{10}{x} - x - 2$  esta es la ecuación que contiene la solución y la función  $f(x) = x \cosh \frac{10}{x} - x - 2$  es la función con que se trabaja se le va a llamar función interobjeto, más adelante se seguirá trabajando con ella; posteriormente se evaluó la misma para los valores de  $x$  desde cero con un incremento de 10 hasta que se encontró en el valor de la función un cambio de signo y se obtuvo el intervalo

necesario para aplicar el método numérico de bisección.

**Fig. 3** Hoja del Excel con el intervalo. Fotografía tomada de la hoja de Excel para la solución del problema propuesto

<b><math>F(a)=2+x-x\cosh(10/x)</math></b>		<b><math>a</math></b>
<b>-0,552519304</b>		<b>20</b>
<b>-0,426285375</b>		<b>21</b>
<b>-0,312128746</b>		<b>22</b>
<b>-0,208375199</b>		<b>23</b>
<b>-0,113649119</b>		<b>24</b>
<b>-0,026809296</b>		<b>25</b>
<b>0,053099302</b>		<b>26</b>
<b>0,126882257</b>		<b>27</b>
<b>0,195224023</b>		<b>28</b>
<b>0,258710007</b>		<b>29</b>
<b>0,317843965</b>		<b>30</b>

El intervalo encontrado fue (25,26), con él y tomando como error 0.1, este error es justificado debido a que se parte de coordenadas que se miden directamente, digamos con una cinta métrica que a lo sumo aprecia hasta los milímetros, en ese caso el valor de  $a$  se puede expresar con tres cifras significativas, las dos primeras son exactas, la tercera es dudosa.

Tomamos  $a_1 = 25$  y  $a_2 = 26$

Evaluamos la ecuación para  $a_1$  y o  $a_2$  y se logró obtener los siguientes casos:

Si al sustituir  $a_1 = 25$  o  $a_2 = 26$  en la función interobjeto se obtiene  $f(x) = 0$  entonces el valor de  $a$  para el cual se obtiene  $f(x) = 0$  es la solución buscada.

Si al sustituir los valores de  $a_1 = 25$  o  $a_2 = 26$  en la función interobjeto no se obtiene  $f(x) = 0$  para ninguno de los dos valores de  $a$  sustituidos entonces se obtienen dos valores de  $f(x) \neq 0$  y además de signo contrario

Siendo:  $a_{12} = \frac{a_1+a_2}{2}$ ;  $E1 = \left| \frac{X_2-X_1}{X_2+X_1} \right|$  y  $E1 = \left| \frac{X_{12}^{nuevo}-X_{12}^{viejo}}{X_{12}^{nuevo}} \right|$



Si se obtiene  $E_1 < e$  o  $E_2 < e$  entonces se toma como la solución, la semisuma de los valores evaluados en el paso anterior. Aquí puede darse el caso en que  $a_{12}$  haga  $f(x) = 0$ , pero esto no significa que la solución sea exacta como sí ocurre en Matemática donde las magnitudes representan cantidades exactas, esto se debe a que se está trabajando con cifras significativas.

Si se obtiene  $E_1 > e$  o  $E_2 > e$ , entonces se repite el proceso. Tomando, de los dos intervalos en que quedó dividido, aquel en que la función cambia de signo. Para la realización de este paso en el Excel se utiliza la función SI ya que ella a partir de una condición, devuelve un valor falso y uno verdadero en la casilla especificada; en este caso si  $f(a_{12}) > 0$  o  $f(a_{12}) < 0$ , se sustituye el valor de  $a_{12}$  por la casilla que posee  $a_1$  o  $a_2$  en dependencia del cambio de signo. Esta función facilita la utilización del método, automatizando el proceso búsqueda de la raíz.

Se hace necesario Recordar que el Excel brinda dentro de sus ventajas escribir las ecuaciones y obtener las respuestas en las casillas especificadas, debido a que cada una tiene un identificador. La hoja de Excel en la que se usó el método de bisección y se encontró la respuesta queda como se muestra en la figura:

**Fig. 4** Hoja del Excel con el problema resuelto utilizando el método numérico de bisección. Fotografía tomada de la hoja de Excel para la solución del problema propuesto

Determinar la primera raíz de $f(x)$								
Iteración	a1	f(a1)	a2	f(a2)	a12	f(a12)	E1	E2
1	25	-0,0268093	26	0,0530993	25,5	0,01395792		1,96078431
2	25,5	0,01395792	26	0,0530993	25,75	0,03372564	0,97087379	0,97087379
3	25,75	0,03372564	26	0,0530993	25,875	0,04346098	0,48309179	0,48309179
4	25,875	0,04346098	26	0,0530993	25,9375	0,04829217	0,24096386	0,24096386
5	25,9375	0,04829217	26	0,0530993	25,96875	0,05069874	0,12033694	0,12033694

Con 8 iteraciones se obtiene la respuesta del problema con un error de 0.1, se debe tener en cuenta el carácter aproximado del método numérico que se aplica y cómo ello lleva a realizar aproximaciones o simplificaciones del ente físico descrito por el interobjeto. Tales aproximaciones de carácter cualitativo se llevan a cabo en la etapa de singularización al evidenciar en el fenómeno o sistema concreto cómo tienen lugar las aproximaciones realizadas a la clase particular al aplicarle el método numérico seleccionado a la función interobjeto que la describe.

La exactitud de la solución depende de la exactitud con que sea factible medir la magnitud física que representa dicha solución de acuerdo con el fenómeno en que ella se manifieste y los instrumentos de medición que puedan usarse para medir la magnitud en el fenómeno dado. Es importante, que, desde el punto de vista físico, el estudiante entienda que los resultados en la Física son una aproximación de la realidad y no un 100% de exactitud.

Al concluir la introducción de los problemas de física se realizó una prueba pedagógica para comparar los resultados antes y después de la aplicación de los métodos numéricos, a continuación, mostramos los resultados: la prueba constaba de tres problemas todos del tema de mecánica, dos de las preguntas podrían ser resueltas por métodos exactos o numéricos y la tercera necesariamente necesitaba de los métodos numéricos. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Ocho estudiantes (44.4%) lograron enunciar y formular correctamente las ecuaciones y leyes de los temas preguntados, en las dos primeras preguntas.

Diez de los estudiantes (55.5%) seleccionaron correctamente las vías de solución a las problemáticas planteadas, en las dos primeras preguntas.

Todos los estudiantes (100%) expusieron que la tercera pregunta era imposible de resolver o que no tenía solución.

Quince estudiantes (83.3%) lograron enunciar y formular correctamente las ecuaciones y leyes de los temas preguntados, en las dos primeras preguntas

Catorce de los estudiantes (77.7%) seleccionaron correctamente las vías de solución a las problemáticas planteadas, en las dos primeras preguntas.

Quince de los estudiantes (83.3%) lograron resolver correctamente con el empleo del método de bisección y el Excel del problema en cuestión.

Es necesario señalar que tres de los estudiantes resolvieron alguna de las dos preguntas que podían ser resueltas por métodos exactos, la solucionaron usando métodos numéricos, debido a que todos los problemas pueden ser resueltos por métodos numéricos aun si tienen solución por métodos exactos.

En el artículo se muestra solo un ejemplo de lo problemas que se aplicaron.

Para de esta manera enseñar, cómo se pueden incluir los métodos numéricos en el aprendizaje de la física.

Del análisis de los resultados al aplicar los problemas con el empleo de la matemática numérica y el uso del Excel, en el segundo año de la carrera ingeniería Agrónoma, se infiere que hubo un avance cuantitativo en el nivel de aprendizaje de los contenidos de la Física, pues la mayor cantidad de estudiantes logran solucionar los problemas con la utilización de la matemática numérica y el uso del Excel integrando de esta manera los contenidos físicos, matemáticos e informáticos. Además de proporcionarles a estos estudiantes una poderosa herramienta que pueden utilizar a lo largo de su carrera de ingeniería, y en su futuro desempeño profesional.

### **Conclusiones**

Los estudios realizados en la sustentación teórica de este trabajo evidencian la importancia de la inclusión de los métodos numéricos en la enseñanza de la ciencia a partir del uso de la tecnología, en la sociedad contemporánea.

La introducción de los métodos numéricos en la enseñanza de la Física en la universidad constituye una necesidad para lograr que los estudiantes

comprendan el lugar de la matemática numérica en el método científico y contribuir a la formación de su concepción científica del mundo.

La introducción de los métodos que se proponen permite abordar otras manifestaciones de los fenómenos físicos que no es posible abordar usando solamente métodos exactos.

El problema ejemplo se caracteriza por la utilización del Excel de Microsoft, el empleo de los métodos numéricos, la objetividad, el desarrollo y la interdisciplinariedad.

La evaluación obtenida después de la aplicación de estos problemas en los estudiantes que cursan segundo año de la carrera de Ingeniería Agrónoma, permite considerar que el empleo de los métodos numéricos en la enseñanza de la Física es factible y pertinente.

### Referencias bibliográficas

- Benacka, J. (2008). Spreadsheet Numerical Modeling in Secondary School Physics and Biology. *Spreadsheet in Education (eJSiE)*, 2(3), Art.3.
- Chapra, S. y Clough, D. (2021). *Applied numerical methods with Python for engineers and scientist*. Mc Graw Hill.
- Christopher J. Van (2006). Using Spreadsheets to Learn Numerical Methods. *Spreadsheet in Education (eJSiE)*. Drew University, New Jersey.  
<http://epublications.bond.edu.au/ejsie/vol2/iss1/9>
- Gaik Tay, K., Long Kek, S. y Abdul-Kahar, R. (2013). Three Spreadsheet Models of a Simple Pendulum. *Spreadsheet in education (eJSiE)*, 6(2), Art.5.
- Guerra Véliz, Y. (2008). *Modelo didáctico para la implementación de los métodos numéricos en el proceso educativo de la Física General en la especialidad de profesor de Ciencias Exactas*. ISBN 978-959-16-0882-6, Editorial Universitaria.
- Lima Pisco, R., Cedeño Ferrin, J. y Padilla Orlando, M. (2020). Aplicación de los métodos numéricos en la enseñanza superior. *Revista Científica Sinapsis*, 1(16).  
<https://www.itsup.edu.ec/myjournal/index.php/sinapsis/article/view/356>
- Mañas, J. y Pinta, M. (2018). *Métodos numéricos para el análisis matemático con Matlab (1. edición en español)*. Ecuador: Editorial Universidad

Técnica de Machala (UTMACH).

<http://repositorio.utmachala.edu.ec/handle/48000/12495>

Mora Flores, W. (2016). *Introducción a los métodos numéricos. Implementaciones en Basic (Libre Office, Excel)*.

<http://docer.com.ar/doc/xc10888>

Oliva, A. (2017). *Uso de Hojas de cálculo de Excel ¿Ventajas o desventajas?*

<https://excelfull.com/funcion/uso-hojas-calculo-excel-ventajas-desventajas>

Oliveira, M. y Nápoles, S. (2010). Using a spreadsheet to study the oscillatory movement of a mass-spring system. *Spreadsheet in education (eJSiE)*, 3 (3) Art. 2. <http://www.semanticscholar.org/paper/Using-a-spreadsheet-to-study-the-oscillatory-of-Olivera>

Rega Armas, D. (mar.-jun, 2017). Empleo de los métodos numéricos y el Excel en la solución de problemas de termodinámica. *Revista Pedagogía y Sociedad*, 20 (48). <http://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad/article/view/444>

---

### Conflicto de interés

No existe conflicto de interés en esta investigación.

---

### Contribución de los autores

**DRA:** Concepción de la idea, búsqueda y revisión de literatura, confección de instrumentos, aplicación de instrumentos, recopilación de la información resultado de los instrumentos aplicados, análisis estadístico, confección de tablas, gráficos e imágenes, confección de base de datos, asesoramiento general por la temática abordada y redacción del original (primera versión).

**YGV:** Revisión y versión final del artículo, corrección del artículo, coordinador de la autoría, traducción de términos o información obtenida y revisión de la aplicación de la norma bibliográfica aplicada.

**JLH:** metodología, revisión y redacción del borrador original y aprobación final del manuscrito.

*Pedagogía y Sociedad* publica sus artículos bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



© Dayned Rega Armas, Yusimí Guerra Véliz, Julio Leyva Haza



<https://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad/>: [pedagogiasociedad@uniss.edu.cu](mailto:pedagogiasociedad@uniss.edu.cu)