

Artículo original

La formación de conceptos a partir de la modelación matemática. El concepto de función lineal

Concept formation from mathematical modeling. The concept of linear function

Neisy Caridad Rodríguez Morales¹

E-mail:ncrodriguez@uniss.edu.cu

 <https://orcid.org/0000-0002-3623-9051>

Andel Pérez González¹

E-mail:apgonzalez@uniss.edu.cu

 <https://orcid.org/0000-0003-4435-4030>

Ortelio Nilo Quero Méndez¹

E-mail:oquero@uniss.edu.cu

 <https://orcid.org/0000-0002-7872-2957>

¹Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”, Departamento de Física-Matemática. Sancti Spíritus, Cuba.

¿Cómo citar este artículo? (APA, Séptima edición)

Rodríguez Morales, N. C., Pérez González, A. y Quero Méndez, O. N. (2023). La formación de conceptos a partir de la modelación matemática. El concepto de función lineal. *Pedagogía y Sociedad*, 26 (67), 126-147. <https://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad/article/view/1704>

RESUMEN

Introducción: Este artículo trata la formación del concepto función lineal a través de la modelación matemática haciendo uso de situaciones de la vida diaria, durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Objetivo: Tiene como objetivo proponer un procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal utilizando la modelación matemática.

Métodos: En la realización del trabajo se combinaron métodos del nivel teórico, del nivel empírico y del nivel estadístico-matemático, lo que permitió constatar la existencia de insuficiencias en la formación del concepto función lineal y los fundamentos en que se basa el procedimiento que se propone.

Resultados: El análisis de las posibles causas del problema, condujo a la elaboración de un procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal a partir del uso de la modelación de situaciones problemas.

Conclusiones: El procedimiento puede ser utilizado por los profesores en el empeño de mejorar los resultados de su labor durante el aprendizaje del concepto función lineal por parte de los estudiantes.

Palabras clave: conceptualización; formación de conceptos; función lineal; didáctica; modelación matemática; proceso de enseñanza-aprendizaje.

ABSTRACT

Introduction: This paper deals with the formation of the linear function concept through mathematical modeling making use of daily life situations, during the teaching-learning process of Mathematics.

Objective: It aims at proposing a didactic procedure for the formation of the linear function concept using mathematical modeling.

Methods: To carry out the work, methods from the theoretical, empirical and statistical-mathematical levels were combined, which made it possible to verify the existence of insufficiencies in the formation of the linear function concept and the foundations on which the proposed procedure is based.

Results: The analysis of the possible causes of the problem led to the elaboration of a didactic procedure for the formation of the linear function concept from the use of the modeling of problem situations.

Conclusions: The procedure can be used by professors in the endeavor to improve the results of their work during the students' learning of the linear

function concept.

Keywords: concept formation; conceptualization; didactics; linear function; mathematical modeling; teaching-learning process.

Introducción

Para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática se considera la formación de conceptos como un proceso complejo que se corresponde con la naturaleza de los propios conceptos y su comprensión. Al respecto, Bueno Hernández et al. (2020), destacan que su contribución está en lograr una base conceptual, subjetiva y cognitiva sólida en los estudiantes y que su tratamiento debe orientarse hacia la necesidad de entender la propia matemática y sus aplicaciones.

Precisamente, uno de los conceptos de mayor trascendencia para la Matemática es el de función; este tiene un significado especial en el desarrollo del pensamiento funcional de los estudiantes desde los primeros grados, lo que justifica su presencia en todos los niveles y grados (Ballester Pedroso et al., 2018). En el caso de Cuba, este concepto se forma con la participación de los estudiantes en el octavo grado de la Secundaria Básica.

Dada su naturaleza abstracta, la enseñanza de este concepto es objeto de análisis para los investigadores de la Didáctica de la Matemática a nivel internacional, nacional y local, así lo aseveran López de la Teja et al. (2017), Domínguez Vaillant (2018), Porrás Torres (2018), Locía Espinoza et al. (2018), Castillo Rojas y Gamboa Graus (2020) y Angulo Vergara (2020).

Como resultado de sus estudios el proceso de formación de conceptos exige una renovación de enfoques, que en lo esencial, exige la aplicación de los conocimientos adquiridos a la solución de situaciones de la vida real y así mostrar su utilidad y el carácter instrumental de los conocimientos matemáticos.

Al respecto, entre los objetivos generales para el curso escolar 2020-2021 del nivel educativo Secundaria Básica, se plantea que los estudiantes deben “Demostrar una concepción científica del mundo con la sistematización y ampliación de los contenidos del proceso educativo en la solución de problemas sobre los hechos, fenómenos y procesos que ocurren en la naturaleza” (Ministerio de Educación [Mined], 2020).

El logro de lo anterior, entre otros aspectos, requiere que se incluyan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de la matemática escolar problemas relevantes, que contribuyan a la educación ideológica, política, jurídica, laboral y económica; para la salud, la sexualidad y para la formación estética y ambiental de los alumnos, preferentemente vinculados a su entorno natural y social.

Por lo antes expuesto, el objetivo del artículo es: proponer un procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal, a partir de la utilización de la modelación matemática de situaciones problemas de la vida diaria.

Marco teórico o referentes conceptuales

El concepto es una forma del pensamiento abstracto, y este a su vez, es forma del reflejo mediato y generalizado de la realidad. A través de los órganos de los sentidos se conocen los objetos concretos y sus propiedades; éstas se reflejan mediante las formas del conocimiento sensitivo: sensaciones, percepciones y nociones. (Talízina, 1988, p.150)

Vigotsky (1981, p. 70-71) señala que:

[...] un concepto surge y se forma en el curso de una operación compleja dirigida hacia la solución de algún “problema” y que el “memorizar” las palabras y conectarlas con objetos, no conduce en sí mismo a la formación del concepto; para que el proceso se ponga en marcha debe surgir un problema que no pueda solucionarse más que a través de la formación de nuevos conceptos.

Entre las acciones que deben formarse en el proceso de formación de los conceptos (Talízina, 1988), resaltan tres que se destacan: elección del sistema de características necesarias y suficientes para reconocer al objeto, la inclusión en el concepto y la deducción de las consecuencias. Esta psicóloga reconoce que en la formación de los conceptos la habilidad rectora es la de inclusión.

Desde esta perspectiva, el punto de partida para la formación de nuevos conceptos en el desarrollo psíquico de las personas, es la necesidad de resolver un problema y de comunicarse con otros en el transcurso del proceso de su resolución o después de finalizado el mismo.

En este artículo se parte de considerar los conceptos como:

Una categoría especial en la enseñanza de la Matemática; ya que estos constituyen la forma fundamental con que opera el pensamiento matemático y, se tiene en cuenta que los estudiantes deben reconocer que los conceptos tienen su origen en las necesidades de la vida práctica. (Riascos González y Curbeira Hernández, 2018, p. 362)

Ballester Pedroso et al. (1992, p. 291), considera tres fases para el proceso total de elaboración de conceptos:

- La primera fase está caracterizada por consideraciones y ejercicios preparatorios.
- La segunda fase consiste en la formación del concepto.
- La tercera fase consiste en la asimilación del concepto.

El punto esencial de la formación de conceptos desde el punto de vista metodológico, está en reconocer y buscar un sistema de características necesarias y suficientes, del reconocimiento de las características depende la asimilación correcta del concepto.

Ballester Pedroso et al. (1992), considera dos vías principales por los cuales se puede conducir a los alumnos a nuevos conceptos:

- Vía inductiva: Conduce de lo particular a lo general.
- Vía deductiva: conduce de lo general a lo particular (p. 292).

En el presente trabajo estamos proponiendo una vía inductiva.

Siendo consecuente con lo anterior, en Cuba, la preparación para la formación del concepto función transita por tres etapas y comienza desde el preescolar. Desde este momento y según avanzan los primeros grados, los estudiantes se familiarizan con rudimentos de la teoría de conjuntos, agrupan objetos que tienen una característica en común, establecen relaciones de pertenencia sencillas entre elementos de un conjunto y aprenden a reconocer leyes para la formación de conjuntos. Más tarde aprenden las operaciones básicas de cálculo, trabajan con ecuaciones y profundizan en el trabajo con las correspondencias hasta el primer año del nivel educativo de la Secundaria Básica. (Ballester

Pedroso et al., 2018)

A juicio de los autores de este artículo, la primera fase del proceso de elaboración del concepto función comienza mucho antes de su tratamiento en el octavo grado y en esta se ofrecen las consideraciones y ejercicios preparatorios necesarios para la comprensión del referido concepto.

De ahí que no es hasta el octavo grado donde se inicia la segunda fase; es decir, la relacionada con la formación del concepto función y de función lineal en particular. Al respecto, se exige que los estudiantes identifiquen y representen de forma descriptiva, mediante una tabla, un gráfico o una ecuación, relaciones donde a diferencias iguales de una variable corresponden diferencias iguales de otra, para que luego sean capaces de modelar situaciones mediante funciones lineales. (Álvarez Pérez et al., 2014)

Inicialmente se profundiza, desde la investigación en Didáctica de la Matemática, en la etapa que corresponde a la formación del concepto que implica que los estudiantes se motiven y orienten sus objetivos de aprendizaje hacia la identificación y separación de las características comunes y no comunes en determinadas situaciones hasta llegar a la definición del concepto de función. Para ello es necesario considerar tres aspectos esenciales “uno es el de correspondencia, otro es el de covariación (variación conjunta de los argumentos y los valores de la función) y el tercero, es su carácter de objeto matemático con el cual se opera y se establecen relaciones” (Álvarez Pérez et al., 2014, p. 71).

Sobre este particular, se recomienda por los autores citados que la formación del concepto de función debe partir del análisis de problemas que involucren situaciones de correspondencia y variación de carácter intra y extramatemático; las que posibiliten discriminar lo común que tienen y aprovechar su representación gráfica para la interpretación del fenómenos correspondientes y poder arribar a conclusiones sobre el comportamiento de las magnitudes que en ella se relacionan.

De la misma forma se considera la idea de Leal Huise y Bong Anderson (2015) como se citó en Fuentes Acuña et al. (2019), que la resolución de problemas se convierte en un foco importante en la enseñanza y aprendizaje de la

matemáticas por ser “un proceso cognitivo, retador, asociado al desarrollo del pensamiento lógico” (p. 77). Las componentes fundamentales de un problema matemático son las condiciones y las exigencias, las cuales también están presentes en las situaciones-problemas que se utilizan para la formación del concepto función.

A tono con esa idea, Huincahue Arcos et al. (2018), consideran que: “la modelación matemática es una actividad que permite a la persona resolver problemas de la realidad utilizando la matemática y para ellos, se entenderá como un proceso de traducción entre el mundo real y la matemática” (p. 97).

Para Bocco (2010) “un modelo es una representación gráfica, esquemática o analítica de una realidad, que sirve para organizar y comunicar de forma clara los elementos que la conforman y sus relaciones” (p. 9).

Por lo que realizar un modelo consiste en utilizar herramientas matemáticas que relacionan las variables que describen la situación problema planteada.

En tanto, la actividad de modelación es parte de la esencia del quehacer matemático, por lo que debe ser objeto de enseñanza y aprendizaje por parte de los estudiantes y estimular en ellos la utilización de formas de trabajo matemático para obtener nuevos conocimientos matemáticos pues precisamente los modelos matemáticos han puesto de manifiesto la aplicación tan amplia de sus conocimientos a problemáticas de otras ciencias, de la tecnología, la sociedad y el ambiente. (Álvarez Pérez et al., 2014, p. 58)

Es por ello que los autores consideran importante destacar los criterios de Sánchez Cardona y Rendón Mesa (2019) donde plantean que: “la modelación matemática posibilita que los estudiantes relacionen conceptos matemáticos con fenómenos reales, de tal forma que se realizan comprensiones y producen diferentes significados de conceptos matemáticos” (p. 2).

Desde el punto de vista de Mederos Anoceto et al. (2014), como se citó en Domínguez Vaillant (2018), un concepto se ha formado cuando, al menos, se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Se ha determinado una clase de rasgos comunes (en matemática, un conjunto de rasgos esenciales) que caracterizan a los objetos del concepto.

2. Se agrupan en otra clase los objetos que satisfacen los rasgos esenciales.
3. Se utiliza un símbolo lingüístico para el par formado por las dos clases anteriores, o sea, para designar al concepto. (p. 14)

De ahí que la propuesta que se presenta como resultado de este artículo consiste en la utilización de la modelación matemática para la formación del concepto función lineal, dejando de esta manera la enseñanza de tipo tradicional, que presenta de forma fragmentada el proceso de formación de los conceptos. En este caso se utilizará la representación analítica de la función en la forma $y = m x + n$, donde m y n son símbolos para parámetros, que en cada caso particular tomarán valores fijos, y los signos x , y , representan, respectivamente, las variables independiente y dependiente, definidas sobre un conjunto de números reales.

Metodología empleada

Para la concepción de esta investigación la metodología utilizada tiene en consideración el enfoque dialéctico-materialista como método general. Se utilizaron diferentes métodos teóricos y empíricos. La utilización de métodos teóricos como el histórico-lógico y el análisis-síntesis, permitieron analizar la evolución histórica de la formación del concepto función lineal, así como la situación actual tanto nacional como internacional al determinar las principales dificultades que enfrenta el proceso de formación de un concepto; además, para analizar las diferentes etapas por las que ha transitado y constatar el estado del problema, determinando las dificultades y potencialidades que presentan los estudiantes en el proceso de formación del concepto función lineal. El análisis de la información obtenida posibilitó fundamentar desde posiciones teóricas y metodológicas el procedimiento que se socializa en este escrito.

Resultados y discusión

Procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal

También se tiene en cuenta que los procedimientos didácticos constituyen:

Herramientas que le permiten al docente orientar y dirigir la actividad del alumno, de modo tal que la influencia de los "otros", propicie el desarrollo individual, estimulando el pensamiento lógico, el pensamiento

teórico y la independencia cognitiva, motivándolo a "pensar" en un "clima favorable de aprendizaje. (Zilberstein Toruncha y Silvestre Oramas, 2004, p. 99)

A continuación se describe el procedimiento didáctico elaborado para la formación del concepto función lineal utilizando la vía inductiva.

1. Presentación de las situaciones-problemas que pueden ser modeladas utilizando el concepto de función lineal.
2. Análisis de la vía de solución de las situaciones-problemas presentadas para ser modeladas utilizando el concepto de función lineal.
3. Identificación de las características comunes o propiedades de los objetos que intervienen en las situaciones-problemas analizadas.
4. Planteamiento de la definición del concepto función lineal.

Seguidamente se explica cada una de las acciones del procedimiento didáctico.

Acción 1.

Primeramente es necesario precisar, según los autores del artículo, que entre los distintos conceptos de problema que se han manejado en el campo de la Didáctica de la Matemática, el que más se ajusta a los fines de la formación de conceptos es el de situación-problema caracterizada por Douady & Parzysz (2000, p. 163):

Lo anterior, justifica que el proceso de formación se inicie con la presentación de las situaciones-problemas que pueden ser modeladas utilizando el concepto de función lineal. En consecuencia, se debe lograr la familiarización de los estudiantes con cada situación problema y su posible vía de solución; estas deben expresar la necesidad de nuevos conocimientos que serán adquiridos o construidos por los propios estudiantes. De igual forma, las situaciones problemas se deben formular desde varios contextos diferentes para de esta forma potenciar una mejor comprensión de las mismas.

En este primer momento, el profesor asigna o propone a los estudiantes el análisis de varias de las situaciones-problemas identificadas; en cada caso la solución siempre será un elemento de la extensión del concepto que se quiere formar (situaciones-problemas), los cuales debe seleccionar o elaborar cuidadosamente.

La representación seleccionada para los objetos de la clase inicial en el caso de la formación del concepto de función lineal, conduce a la utilización de la palabra “fórmula” como medio; de manera que en cada caso los estudiantes deben encontrar una fórmula que describa o modele analíticamente la situación planteada.

Acción 2.

Durante la segunda acción, encaminada al análisis de la vía de solución de las situaciones-problemas presentadas para ser modeladas utilizando el concepto de función lineal se debe considerar que el proceso de resolución de las situaciones-problemas está sujeto a las fases que plantea Polya (1982): “la comprensión del problema, la elaboración de un plan, la ejecución del plan y el análisis de las soluciones y de la vía” (p. 45).

La comprensión del problema está dirigida a “[...] identificar todo conjunto de proposiciones verdaderas que a través de inferencias enlaza el planteamiento inicial (elementos dados, datos) con la exigencia (incógnita, elementos buscados)” (Jiménez-Milián et al., 2010, p. 26).

La elaboración de un plan de solución, que en este caso se enfoca esencialmente hacia la búsqueda de un modelo matemático funcional, que permita resolver la situación-problema elaborada con ese fin. En tal sentido, se pasa por una etapa intermedia donde se debe modelar la relación esencial entre las magnitudes que intervienen en esta, siempre teniendo en cuenta el dominio al que la situación pertenece.

En el plan de solución debe estar contemplada, en primer lugar, la acción de la obtención de ese modelo.

Después de la acción anterior, el proceso de modelación conduce a la elaboración de tres modelos: dos para las magnitudes variables que intervienen en la situación y uno para la relación esencial entre estas magnitudes. Estos tres modelos, de conjunto, constituyen un modelo matemático de la situación.

Por tanto, el plan de solución debe incluir, como segunda acción importante, las vías para la elaboración de estos tres modelos.

Durante la ejecución del plan el estudiante debe llegar a encontrar la fórmula mediante inducción analizando casos particulares y otros aplicando la

deducción. En este momento los estudiantes deben modelar las magnitudes mediante dos variables, modelar los dominios respectivos de cada variable y modelar la fórmula que establece o describe las relaciones entre las magnitudes.

El modelo de cada magnitud está compuesto por una variable y un conjunto numérico que constituye el dominio de la variable, mientras que el modelo de la relación entre estas magnitudes es una fórmula.

Durante la etapa de análisis de la solución y de la vía se realiza la comprobación de la situación problema, la cual debe realizarse de acuerdo con las relaciones que se establecen en el enunciado. No solo se evalúa la solución sino también la vía de solución. Aquí se hacen consideraciones retrospectivas, donde se retoman los procedimientos y métodos utilizados durante el plan de solución. Se reflexiona sobre la existencia de otras vías de solución o la posibilidad de utilizar esta vía de solución en otras situaciones similares.

Acción 3.

La identificación de las características comunes o propiedades de los objetos que intervienen en las situaciones-problemas analizadas, se realizan bajo la dirección del profesor; para ello es importante lograr un uso adecuado de la heurística.

En este momento, los estudiantes deben comparar y analizar los objetos encontrados como soluciones de las situaciones problemas propuestas, con el objetivo de seleccionar las características esenciales que sean satisfechas por cada uno de estos objetos y que permitan identificarlos y diferenciarlos de otros objetos (formación del contenido del concepto) y mediante un proceso de abstracción, expresarlas en forma de propiedades matemáticas.

Acción 4

Finalmente, el planteamiento de la definición del concepto función lineal se realiza mediante un proceso de síntesis que permite el agrupamiento, en una clase, de todos los objetos que satisfacen el sistema de propiedades determinado en la acción anterior.

Posteriormente, a través del proceso de generalización se consideran en una clase todos los objetos que fueron comparados y que cumplen todas las propiedades que como resultado del proceso de síntesis se agruparon en una

clase y se da a conocer el nombre del concepto formado cuya extensión está delimitada por todos esos objetos.

Seguidamente, se ilustra la aplicación del procedimiento didáctico para la formación del concepto función lineal.

Como parte de la acción uno del procedimiento se sugiere a los estudiantes el análisis de las siguientes situaciones problemas:

Situación 1

Un móvil parte con movimiento rectilíneo uniforme de un punto A hacia un punto B que se encuentra a 180m de distancia de A. Se han medido para distintos instantes de tiempo las distancias del móvil con respecto al punto A, obteniéndose:

Tiempo en segundos	Distancia en metros
1	30
2	60
3	90
4	120
5	150
6	180

- ¿Qué valores puede tomar el tiempo recorrido del punto A hasta el punto B?
- ¿Qué valores puede tomar la distancia recorrida por el móvil?
- Encuentre una fórmula que te permita calcular la distancia recorrida por el móvil, conociendo el tiempo transcurrido.

Situación 2

Se conoce que el costo en pesos del envío de un bulto postal está determinado por la cantidad de kilogramos que pesa de acuerdo a la ley siguiente:

Peso del bulto postal en kilogramos	Costo en pesos
Por el primer kilogramo o fracción de este	\$2,05
Más de un kilogramo o fracción de este	\$1,05 (por cada uno)

Nota: El peso máximo de cada bulto postal es de 5kg.

- Determine los valores que puede tomar el peso del bulto postal en kilogramos.

- b) Determine los valores que puede tomar el costo en peso de cada bulto postal.
- c) Encuentre una fórmula para calcular el costo del bulto postal, conociendo su peso.

Situación 3

A una cierta masa de agua destilada contenida en un recipiente se le suministra una cantidad de calor constante por minuto (durante tres horas), la temperatura aumenta linealmente. Durante los primeros 20 minutos el agua alcanza una temperatura de 100°C y después se estabiliza, dado que en este momento empieza a ocurrir un cambio de estado. La temperatura inicial del agua es de 20°C .

- a) Encuentre los valores que admite el tiempo que se le suministra la cantidad de calor según la situación planteada.
- b) Encuentre los valores que admite la temperatura según la situación planteada.
- c) Determina una fórmula que te permita calcular la temperatura que alcanza el agua, conociendo el tiempo que se le suministra la cantidad de calor. Analiza si en todos los casos puedes utilizar la misma fórmula.

Como parte de la acción, se trabaja en la búsqueda del plan de solución de cada situación problema y, en función de ello, se elaboran los tres modelos referidos antes.

Solución de las situaciones problemas

Respuesta de la situación número 1

$t \Rightarrow$ la magnitud que modela el tiempo que demora el móvil en recorrer la distancia desde A hasta B.	La magnitud t toma los valores: $t \in [0;6]$	De acuerdo con la relación establecida se puede utilizar la siguiente fórmula para calcular la distancia recorrida por el móvil, conociendo el tiempo que demora el mismo:
$d \Rightarrow$ la magnitud que modela la distancia recorrida por el móvil.	La magnitud d toma los valores: $d \in [0;180]$	$d=30t \quad 0 \leq t \leq 6$

Respuesta de la situación número 2

$p \Rightarrow$ la magnitud que modela el peso del bulto postal en kilogramos	La magnitud p toma los valores: $p \in (0;5]$	De acuerdo con la ley establecida se pueden utilizar las siguientes fórmulas para calcular el costo de un bulto postal conociendo su peso $c=2,05 \quad 0 < p \leq 1$ $c=3,10 \quad 1 < p \leq 2$ $c=4,15 \quad 2 < p \leq 3$ $c=5,20 \quad 3 < p \leq 4$ $c=6,25 \quad 4 < p \leq 5$
$c \Rightarrow$ la magnitud que modela el costo del bulto postal según el peso del mismo	La magnitud c toma los valores: $c \in [2,05;6,25]$	

Respuesta de la situación número 3

$c \Rightarrow$ la magnitud que modela el tiempo que se le suministra calor al agua.	La magnitud c toma los siguientes valores: $c \in [0;180]$	De acuerdo con la relación establecida se pueden utilizar las fórmulas siguientes para calcular la temperatura que alcanza el agua, conociendo el tiempo que se le suministra calor. $t=20+4c \quad 0 \leq c \leq 20$ $t=100 \quad c > 20$
$t \Rightarrow$ la magnitud que modela la temperatura que alcanza el agua.	La magnitud t toma los siguientes valores: $t \in [20;100]$	

Acción tres del procedimiento:

Para la determinación del sistema de propiedades de los objetos encontrados en la solución de las situaciones problemas propuestas, como parte de la acción tres del procedimiento los estudiantes deben resolver cada situación y

para ello el profesor puede orientar o sugerir el completamiento de una tabla como la siguiente:

Sit.	Mag.1	Mag. 2	Modelo mag. 1	Modelo 2	Modelo de la relación entre las magnitudes	
1	t	d	$t \in [0;6]$	$d \in [0;180]$	$d=30t$	$0 \leq t \leq 6$
2	p	c	$p \in (0;5]$	$c \in [2,05;6,25]$	$c=2,05$	$0 < p \leq 1$
					$c=3,10$	$1 < p \leq 2$
					$c=4,15$	$2 < p \leq 3$
					$c=5,20$	$3 < p \leq 4$
					$c=6,25$	$4 < p \leq 5$
3	c	t	$c \in [0;180]$	$t \in [20;100]$	$t=20+4c$	$0 \leq c \leq 20$
					$t=100$	$c > 20$

La comparación de cada magnitud les permite determinar las siguientes características:

1. Los modelos de las magnitudes 1 y 2 permiten identificar como rasgo común que en todos los casos existe una variable cuyo dominio es un conjunto de números.
2. La comparación de los modelos de la relación entre las dos magnitudes permite identificar como rasgos comunes:
 - Para cada valor de una de las variables existe un único valor de la otra variable.
 - La variable dependiente tiene exponente 1 y coeficiente 1.
 - La variable independiente tiene exponente 1.
 - Por intervalos del dominio de la variable independiente, los valores de la variable dependiente se obtienen de los valores de la variable independiente multiplicándola por un número y adicionándole otro número.

La primera de estas dos propiedades indica que en cada caso existe una función cuyo dominio es el primer conjunto y cuya imagen es parte del segundo.

La segunda propiedad indica una característica de cada una de las funciones representadas anteriormente.

Finalmente, ya en la acción cuatro del procedimiento, para llegar al planteamiento de la definición del concepto que se quiere formar el profesor debe agrupar en una clase todos los objetos que satisfacen el sistema de propiedades determinado en el paso anterior y nombrar el concepto a cuya extensión pertenecen esos objetos.

La representación analítica de las fórmulas encontradas para relacionar las magnitudes 1 y 2, tienen la forma de la función $y = m x + n$, donde m y n son símbolos para parámetros, que en cada caso particular tomarán valores fijos, y los signos x , y , representan, respectivamente, las variables independiente y dependiente, definidas sobre un conjunto de números reales.

Según los valores que pueden tomar m y n , se ha dividido estas funciones en las siguientes clases:

Situaciones problemas	Valores de los parámetros m y n	Ecuaciones funcionales
1	$m \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{R}$	Para todos los elementos del dominio de la variable independiente se obtiene una única ecuación de la forma $y=mx+n$
2	$m=0$ $n \in \mathbb{R}$	Para los diferentes subintervalos del dominio de la variable independiente se obtienen ecuaciones de la forma: $y=n$
3	$m=0$ o $m \neq 0$ $n \in \mathbb{R}$	Para los diferentes subintervalos del dominio de la variable independiente se obtienen ecuaciones de la forma: $y=mx+n$ o $y=n$

La colección de todas las ternas (X, Y, f) donde X es el dominio, Y es el codominio y f las ecuaciones funcionales que relacionan las magnitudes 1 y 2, se les llaman funciones lineales.

Valoración del resultado propuesto

El procedimiento propuesto se aplicó en la práctica pedagógica, por uno de los autores del artículo. Para el análisis del nivel alcanzado por los estudiantes en la formación del concepto función lineal, se identificaron dos dimensiones: la cognitiva y la motivacional.

Para determinar los indicadores de la dimensión cognitiva se tuvo en cuenta las operaciones a ejecutar por los estudiantes durante la formación del concepto; de ahí que se consideraran los siguientes: identificar el concepto y argumentar, ejemplificar el concepto y argumentar y plantear problemas relacionados con el concepto.

De igual forma, los indicadores de la dimensión motivacional fueron: interés por conocer el concepto, estado de ánimo mientras se forma el concepto e interés por resolver ejercicios relacionados con la formación del concepto.

Para la modelación matemática de los indicadores se requirió de la ejecución de las acciones siguientes: representación de cada indicador mediante una variable, determinación del dominio de la variable y determinación de los criterios para asignar a la variable cada uno de los elementos del dominio.

En tanto, una vez aplicado el procedimiento propuesto para la formación del concepto función nivel se valoró el nivel de aprendizaje de los estudiantes en la formación del concepto correspondiente. Para ello se aplicó una guía de observación del desempeño y una prueba pedagógica. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Indicador: identificar el concepto y argumentar.

Los datos recopilados evidenciaron que de los 29 estudiantes participantes, 26 (89,7 %) identifican el concepto función lineal a pedazos y argumentan, 2 (6,9%) identifican dicho concepto pero no son capaces de argumentar y solo 1 (3,4%) no identifica el concepto función lineal a pedazos.

Indicador: ejemplificar el concepto y argumentar

En este indicador se constató que 24 (82,8%) estudiantes, ejemplifican el concepto función lineal a pedazos y argumentan, 2 (6,9%) ejemplifican el concepto pero no argumentan y 3 (10,3%) no ejemplifican el concepto.

Indicador: plantear problemas relacionados con el concepto.

Los resultados obtenidos del control de este indicador revelan que de los 29 estudiantes, 21 (72,4%), plantean problemas relacionados con el concepto, 4 (13,8%), plantean problemas con incoherencias u omisión de datos y 4 (13,8%), no plantean problemas relacionados con el concepto.

Indicador: interés por conocer el concepto.

El análisis realizado de los resultados obtenidos de este indicador se pudo constatar, que 24 (82,8%) estudiantes, mostraron interés en conocer el concepto, 4 (13,8%), en ocasiones mostraron interés en conocer el concepto y 1 (3,4%), no mostró interés por conocer el concepto.

Indicador: estado de ánimo mientras se forma el concepto.

Los resultados obtenidos del control de este indicador revelan que sólo 24 (82,8%), mostraron buen estado de ánimo mientras se estudia el concepto, 4 (13,8%), en ocasiones mostraban buen estado de ánimo mientras se estudiaba el concepto y 1 (3,4%), no mostró interés mientras se estudiaba el concepto.

Indicador: interés por resolver ejercicios relacionados con la formación del concepto.

La valoración de este indicador permitió determinar que 23 (79,2%), mostraron interés en resolver otros ejercicios relacionados con el concepto, 4 (13,8%), en ocasiones mostraron interés en resolver otros ejercicios relacionados con el concepto y 2 (6,9 %), no mostraron interés en resolver ejercicios relacionados con el concepto.

El análisis efectuado anteriormente a cada uno de los indicadores de la variable nivel, alcanzado por los estudiantes en la formación de conceptos y la valoración realizada a los datos mostrados, permitió concluir que los indicadores, donde se alcanzan menos resultados fueron los relacionados con la ejemplificación del concepto, su argumentación y en el planteamiento de problemas relacionados con el mismo.

Conclusiones

A partir del estudio bibliográfico realizado se pudo constatar que un concepto se ha formado cuando se conoce su contenido y su extensión y que para su formación se le concede gran importancia a la resolución de problemas y a la modelación matemática.

Para la formación del concepto función lineal a pedazos, se propone un procedimiento didáctico sustentado en la solución de problemas y en el uso de la modelación matemática; el cual orienta la actuación de los estudiantes y estimula que sean protagonistas de la formación del concepto.

Luego de la aplicación práctica del procedimiento didáctico se pudieron constatar las transformaciones ocurridas en el nivel de formación del concepto función lineal que lograron los estudiantes participantes de la investigación.

Referencias bibliográficas

Álvarez Pérez, M., Almeida, B. y Villegas, E. V. (2014). *El proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura matemática documentos metodológicos*. Pueblo y Educación.

Angulo Vergara, M. L., Arteaga Valdés, E. y Carmenates Barrios, O. A. (2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Revista Conrado*, 16(74), 298-305. <https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/1365/1355>

Ballester Pedroso, S., García La Rosa, J. E., Almeida Carazo, B. A., Santana de Armas, I. F., Álvarez Pérez, M. M., Rodríguez Ortiz, M., González Noguera, R. A., Villegas Jiménez, E. V., Fonseca González, A. L., Puig Reyes, N. I., Ortega Valdés, E., Valdivia Sardiñas, M. de los A. y Fernández Peá, C. L. (2018). *Didáctica de la Matemática: Tomo 1*. Editorial Universitaria "Félix Varela".

Ballester Pedroso, S., Santana de Armas, H., Hernández Montes de Oca, S., Cruz, I., Arango González, C., García García, M., Álvarez Gómez, A., Rodríguez, M., Batista, L. C., Villegas Jiménez, E. V., Almeida Carazo, B. A. y Torres Fernández, P. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática Tomo II*. Pueblo y Educación.

Bocco, M. (2010). *Funciones elementales para construir modelos matemáticos*. Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Educación Tecnológica.

<http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL001843.pdf>

- Bueno Hernández, R., Naveira Carreño, W. y González Hernández, W. (2020). Los Conceptos Matemáticos y sus definiciones para la formación de los ingenieros informáticos para la sociedad. *Revista Universidad y Sociedad*, 12(4), 147-155. <http://scielo.sld.cu/pdf/rus/v12n6/2218-3620-rus-12-06-444.pdf>
- Castillo Rojas, Y. y Gamboa Graus, M. E. (2020). Tratamiento didáctico interdisciplinario de la funciones matemáticas en la educación preuniversitaria: tratamiento didáctico interdisciplinario de funciones matemáticas. *Revista Didasc@li*, 11(3), 299-324. <https://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalia/article/view/1007/1023>
- Domínguez Vaillant, A. E. (2018). *Estrategia metodológica para la formación de conceptos con apoyo de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la asignatura Matemática 3 de la Universidad de las Ciencias Informáticas* [Tesis de maestría, Universidad de La Habana]. <https://repositorio.uci.cu/jspui/bitstream/123456789/7884/1/9-07-Tesis-Arodys%20.pdf>
- Douady, R. & Parzysz, B. (2000). *La Geometría en el Salón de Clases*. En V. M., Hernández y M. Villalba (Trad.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century: Capítulo 5*, (pp. 159-192). <https://docplayer.es/19626866-5-la-geometria-en-el-salon-de-clase.html>
- Fuentes Acuña, N. S., Roa Puentes, P. I. y Vásquez Larenas, V. A. (2019). *Propuesta didáctica utilizando la modelación matemática en el aprendizaje de las funciones para estudiantes de octavo básico*. [Seminario, Universidad de Concepción]. <http://repositorio.udec.cl/handle/11594/413/3/Fuentes%20Acu%c3%b1a%20-%20Roa%20Puentes%20-20V%c3%a1squez%20Larenas.pdf>
- Huincahue Arcos, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de investigación y experiencias didácticas*, 36(1), 99-115. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/335276/426109>

- Jiménez-Milián, M. H., Rodríguez-Sosa, J. B. y Ron Galindo, J. (2010). La calidad del aprendizaje y del trabajo metodológico en la formación pedagógica. *Varona*, (50), 24-38. <https://www.redalyc.org/pdf/3606/360635568005.pdf>
- Locia Espinoza, E., Mederos Anoceto, O. B., Sigarreta, J. M. y Villarraga, B. A. (2018). Aproximación teórico-metodológica a la formación de conceptos matemáticos. *Premisa*, 20(79), 24-38. <http://funes.uniandes.edu.co/22893/1/Locia2018Aproximacion.pdf>
- López de la Teja, L. J., Sarría Stuart, Á. y Fernández Álvarez, D. (2017). La formación de conceptos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los sistemas de gestión de bases de datos. *Revista Conrado*, 13(57), 139-145. <https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/451/486>
- Ministerio de Educación [Mined] (2020). *Adaptaciones curriculares para el curso escolar 2020-2022: Educación Secundaria Básica*. Autor.
- Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.
- Porras Torres, F. (2018). Evolución del concepto de función como respuesta a problemas de la humanidad. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (1), 78-105. https://praxiseducacionpedagogia.univalle.edu.co/index.php/praxis_educacion/article/view/6466/13606
- Riascos González, Y. y Curbeira Hernández, D. (2018). Acciones y operaciones para la formación de conceptos de la geometría plana. *Revista Conrado*, 14(65), 360-366. <https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/858/887>
- Sánchez Cardona, J. y Rendón Mesa, P. A. (2019). *La evaluación en la modelación matemática. Una revisión crítica de literatura*. [Discurso principal] XV Conferencia interamericana de educación matemática. Medellín, Colombia. https://www.researchgate.net/publication/333204623_La_evaluacion_en_la_modelacion_matematica_Una_revision_critica_de_literatura/link/5ce1e121a6fdccc9ddb8e1/download

Talízina, N. F. (1988). *Psicología de la Enseñanza*. Progreso.

Vigotsky, L. S. (1981). *Pensamiento y Lenguaje*. Edición Revolucionaria.

Zilberstein Toruncha, J. y Silvestre Orama, M. (2004). *Didáctica desarrolladora desde el enfoque histórico cultural*. Ediciones CEIDE.

Conflicto de intereses:

Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

Contribución de los autores:

N.C.R.M.: Elaboró el procedimiento didáctico para introducir el concepto de función y analizó los resultados de su aplicación.

A.P.G.: Aportó criterios relacionados con la argumentación del procedimiento y los ejemplos; revisó el texto para su presentación.

O.N.Q.M.: Aportó criterios relacionados con el enfoque metodológico del artículo y en la argumentación del procedimiento.

Pedagogía y Sociedad publica sus artículos bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)



<https://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad/pedagogiasociedad@uniss.edu.cu>